

Schallgeschwindigkeit in Luft

ERZEUGUNG UND MESSUNG STEHENDER SCHALLWELLEN IN EINEM KUNDT'SCHEN ROHR.

- Erzeugung stehender Schallwellen in einem Kundt'schen Rohr mit beidseitig geschlossenem Ende.
- Messung der Grundfrequenz in Abhängigkeit von der Länge des Kundt'schen Rohres.
- Messung der Frequenzen von Grund- und Oberschwingung bei fester Länge.
- Bestimmung der Wellengeschwindigkeit aus den Resonanzfrequenzen.

UE1070320

06/16 UD

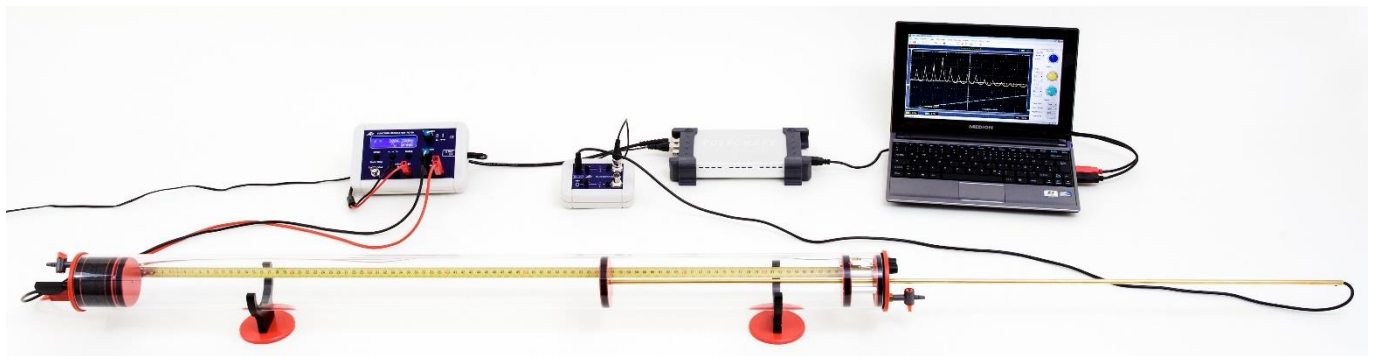


Fig. 1: Messanordnung.

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

In einem Kundt'schen Rohr lassen sich stehende Wellen erzeugen, in dem man mit Hilfe eines Lautsprechers an einem Rohrende Schallwellen geeigneter Resonanzfrequenz erzeugt, die am anderen Ende an einer Wand reflektiert werden. Bei bekannter Rohrlänge lässt sich aus der Resonanzfrequenz und der Nummer der Harmonischen die Wellengeschwindigkeit bestimmen.

Schallwellen breiten sich in Luft und anderen Gasen als schnelle Druck- und Dichteänderungen aus. Sie werden am einfachsten mit Hilfe des Schalldrucks beschrieben, der dem atmosphärischen Druck überlagert ist. Alternativ zum Schalldruck p kann auch die Schallschnelle v zur Beschreibung einer Schallwelle verwendet werden, also die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen am Ort x im schwingenden Medium zum Zeitpunkt t . Schalldruck und Schallschnelle sind z.B. durch die Euler'sche Bewegungsgleichung

$$(1) \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

ρ_0 : Dichte des Gases

verknüpft.

Im Kundt'schen Rohr breiten sich Schallwellen entlang des Rohres aus. Sie können also mit Hilfe einer eindimensionalen Wellengleichung beschrieben werden, die sowohl für den Schalldruck als auch für die Schallschnelle gilt:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

c : Schallgeschwindigkeit

Im Experiment werden harmonische Wellen betrachtet, die am Ende des Kundt'schen Rohres reflektiert werden.

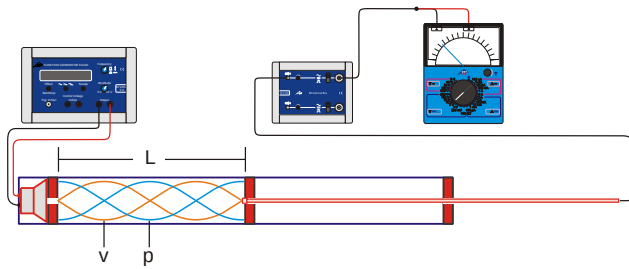


Fig. 2: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus

Als Lösungen der Wellengleichung sind also die Überlagerungen von hinlaufenden und zurücklaufenden Wellen zu betrachten:

$$(3) \quad p = p_{0>} \cdot e^{2\pi i \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right)} + p_{0<} \cdot e^{2\pi i \left(f \cdot t + \frac{x}{\lambda} \right)}$$

$$v = v_{0>} \cdot e^{2\pi i \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right)} + v_{0<} \cdot e^{2\pi i \left(f \cdot t + \frac{x}{\lambda} \right)}$$

$p_{0>}, v_{0>}$: Amplituden der hinlaufenden Welle,
 $p_{0<}, v_{0<}$: Amplituden der zurücklaufenden Welle
 f : Frequenz, λ : Wellenlänge

Dabei ist

$$(4) \quad f \cdot \lambda = c$$

Durch Einsetzen dieser Lösungen in Gleichung (1) erhält man bei getrennter Betrachtung von hinlaufender und zurücklaufender Welle den Zusammenhang

$$(5) \quad p_{0>} = v_{0>} \cdot Z \quad \text{bzw.} \quad p_{0<} = v_{0<} \cdot Z$$

Die Größe

$$(6) \quad Z = c \cdot \rho_0$$

wird Schallkennimpedanz genannt und entspricht dem Wellenwiderstand des Mediums. Sie spielt eine wichtige Rolle bei der Betrachtung der Reflexionen einer Schallwelle an einer Wand mit der Wandimpedanz W :

Es gilt

$$(7) \quad r_v = \frac{v_{0<}}{v_{0>}} = \frac{Z - W}{Z + W} \quad \text{und} \quad r_p = \frac{p_{0<}}{p_{0>}} = \frac{\frac{1}{Z} - \frac{1}{W}}{\frac{1}{Z} + \frac{1}{W}}$$

Im Experiment ist W erheblich größer als Z und daher $r_v = 1$ und $r_p = -1$.

Stellt man sich der Einfachheit halber die Wand bei $x = 0$ vor, so folgt aus (3) für den räumlichen Anteil der Schallwelle:

$$(8) \quad p = p_{0>} \cdot \left(e^{-2\pi i \cdot \frac{x}{\lambda}} + e^{+2\pi i \cdot \frac{x}{\lambda}} \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot t}$$

$$= 2 \cdot p_{0>} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot t}$$

und

$$v = v_{0>} \cdot \left(e^{-2\pi i \cdot \frac{x}{\lambda}} - e^{+2\pi i \cdot \frac{x}{\lambda}} \right) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot t}$$

$$= -2 \cdot i \cdot v_{0>} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot t}$$

Physikalische Realität haben nur die Realteile dieser Terme. Sie entsprechen stehenden Schallwellen, deren Schalldruck an der Wand (also bei $x = 0$) einen Schwingungsbauch aufweist, während die Schallschnelle dort einen Schwingungsknoten hat. Außerdem eilt die Schnelle dem Druck um eine Phasenverschiebung von 90° voraus.

Im Abstand L zur Wand werden die Schallwellen mit Hilfe eines Lautsprechers erzeugt, der mit der Frequenz f schwingt. Dort bilden sich ebenfalls ein Schwingungsbauch des Druckes und ein Schwingungsknoten der Schallschnelle aus. Diese Randbedingungen sind nur erfüllbar, wenn L ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist:

$$(9) \quad L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}$$

Wegen (3) müssen die Frequenzen daher die Resonanzbedingung

$$(10) \quad f_n = n \cdot \frac{c}{2 \cdot L}$$

erfüllen.

GERÄTELISTE

1	Kundt'sches Rohr E	1017339 (U8498308)
1	Mikrofonsonde, lang	1017342 (U8498282)
1	Mikrofonbox @230V	1014520 (U8498283-230)
oder		
1	Mikrofonbox @115V	1014521 (U8498283-115)
1	Funktionsgenerator FG 100 @230V	1009957 (U8533600-230)
oder		
1	Funktionsgenerator FG 100 @115V	1009956 (U8533600-115)
1	USB-Oszilloskop 2x50 MHz	1017264 (U112491)
1	Analog-Multimeter Escola 100	1013527 (U8557380)
2	HF-Kabel, BNC/4-mm-Stecker	1002748 (U11257)
1	Paar Sicherheits-experimentierkabel, 75 cm	1002849 (U13812)
1	HF-Kabel	1002746 (U11255)

AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

- Schallrohr mittels der Standfüße aufstellen (Fig. 1).
- Nacheinander zuerst die Kapillarscheibe und dann die Abschlusskappe mit Anschlussbuchsen für Lautsprecher bündig zueinander in das Schallrohr einsetzen.
- Lange Mikrofonsonde durch die Bohrungen bis zum Anschlag in die Abschlusskappe mit Anschlussbuchsen für Heizstab und die Führungsscheibe einführen.
- SONDENSCHIBE auf die lange Mikrofonsonde aufschrauben.
- Abschlusskappe mit Anschlussbuchsen für Heizstab mit langer Mikrofonsonde und aufgeschraubter SONDENSCHIBE in das Schallrohr einsetzen.

Hinweis:

Ggf. etwas Glyzerin oder Seife auf die Dichtungsringe auftragen, um das Einsetzen der Anschlusskappen zu erleichtern.

- Verschiebbare Skala in der Halterung der Standfüße festklemmen und so verschieben, dass die Null-Markierung mit der Vorderkante der Kapillarscheibe übereinstimmt.
- Ausgangsbuchsen des Funktionsgenerators an das Buchsenpaar zur Versorgung des Lautsprechers anschließen.
- Lange Mikrofonsonde an Eingang Kanal A der Mikrofonbox anschließen.
- Ausgang Kanal A der Mikrofonbox mittels BNC / 4-mm Adapterkabel an das Analog-Multimeter anschließen.
- Steckernetzgerät an die Mikrofonbox anschließen und mit dem Netz verbinden.

Im Experiment wird die Frequenz f des Lautsprechers kontinuierlich variiert, während die Mikrofonsonde den Schalldruck an der Reflexionswand misst. Resonanz ist dann erreicht, wenn das Mikrofonsignal maximale Amplitude aufweist.

Grundfrequenz in Abhängigkeit von der Länge

- Durch Herausziehen oder Hineinschieben der Mikrofonsonde Länge $L = 80$ cm zwischen Kapillar- und Sondenscheibe einstellen.
- Amplitude am Funktionsgenerator und Messbereich am Multimeter geeignet aufeinander abstimmen und ggf. während der Messung anpassen. Maximalleistung des Lautsprechers beachten ($U_{\text{eff}} = 6$ V max.).
- Frequenz auf 150 Hz einstellen und langsam hochregeln. Die Frequenz finden, bei der das Multimeter den *ersten Maximalwert* anzeigt und den Wert der Frequenz in Tab. 1 notieren.

Die so gefundene Frequenz entspricht der Frequenz f_1 der Grundschiwingung für $L = 80$ cm.

- Die Länge L zwischen Kapillar- und Sondenscheibe in 10 cm – Schritten bis $L = 10$ cm einstellen und jeweils die Messung wiederholen. Als Startfrequenz jeweils die gefundene Resonanzfrequenz f_1 der vorhergehenden Messung nehmen.

Frequenzen von Grund- und Oberschwingung bei fester Länge

- Durch Herausziehen oder Hineinschieben der Mikrofonsonde feste Länge $L = 60$ cm zwischen Kapillar- und Sondenscheibe einstellen.
- Amplitude am Funktionsgenerator und Messbereich am Multimeter geeignet aufeinander abstimmen und ggf. während der Messung anpassen. Maximalleistung des Lautsprechers beachten ($U_{\text{eff}} = 6$ V max.).
- Frequenz langsam von 250 Hz bis 3500 Hz hochregeln. Die Frequenzen, bei denen das Multimeter Maximalwerte anzeigt, in Tab. 2 notieren.

- Durch Herausziehen oder Hineinschieben der Mikrofonsonde feste Länge $L = 60$ cm zwischen Kapillar- und Sondenscheibe einstellen.
- Ausgang Kanal A der Mikrofonbox mittels HF-Kabel an Kanal CH1 des USB-Oszilloskops anschließen.
- Das Buchsenpaar "Eingang Steuerspannung / Ausgang Rampe" des Funktionsgenerators direkt mit Kanal CH2 des USB-Oszilloskops verbinden.
- Am Funktionsgenerator die Taste "Sweep" drücken und die Parameter

Freq. start	100 Hz
stop	6000 Hz
int. continuous mode	
Time	4,00 sec

 einstellen.

- Auf dem USB-Oszilloskop die Marke für die horizontale Trigger-Position ganz nach links, die y-Positionsmarke von CH 1 von der Mitte aus ein halbes Kästchen nach unten und die y-Positionsmarke von CH 2 ganz nach unten ziehen und die folgenden Parameter einstellen:

Time/DIV	400 ms
CH1	1,00 V DC
CH2	2,00 V DC
Trigger Mode	Edge
Sweep	Auto
Source	CH2
Slope	–
Level	850 mV

- Den Sweep am Funktionsgenerator starten und warten, bis das vollständige Frequenzspektrum auf dem USB-Oszilloskop angezeigt wird.
- Messung durch Anklicken der Schaltfläche "Stop" auf dem USB-Oszilloskop anhalten und Bildschirmfoto anfertigen.

Frequenzscan

MESSBEISPIEL UND AUSWERTUNG

Tab. 1: Ermittelte Resonanzfrequenzen der Grundschiwingung ($n = 1$) und nach Gleichung (9) berechnete Wellenlängen bei unterschiedlichen Längen L .

L / m	f_1 / Hz	$\lambda_1 = 2 \cdot L$
0,8	218	1,60 m
0,7	250	1,40 m
0,6	292	1,20 m
0,5	350	1,00 m
0,4	436	0,80 m
0,3	583	0,60 m
0,2	884	0,40 m
0,1	1768	0,20 m

Tab. 2: Ermittelte Resonanzfrequenzen von Grund- und Oberschwingung und nach Gleichung (9) berechnete Wellenlängen bei fester Länge $L = 0,6 \text{ m}$.

n	f_n / Hz	$\lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n}$
1	289	1,20 m
2	582	0,60 m
3	876	0,40 m
4	1164	0,30 m
5	1453	0,24 m
6	1746	0,20 m
7	2039	0,17 m
8	2331	0,15 m
9	2623	0,13 m
10	3206	0,12 m
11	3494	0,10 m

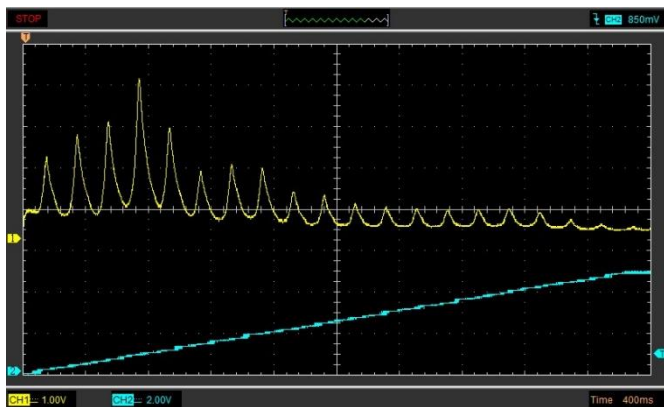


Fig. 3: Oszillogramm des Frequenzscans, $L = 0,6 \text{ m}$.

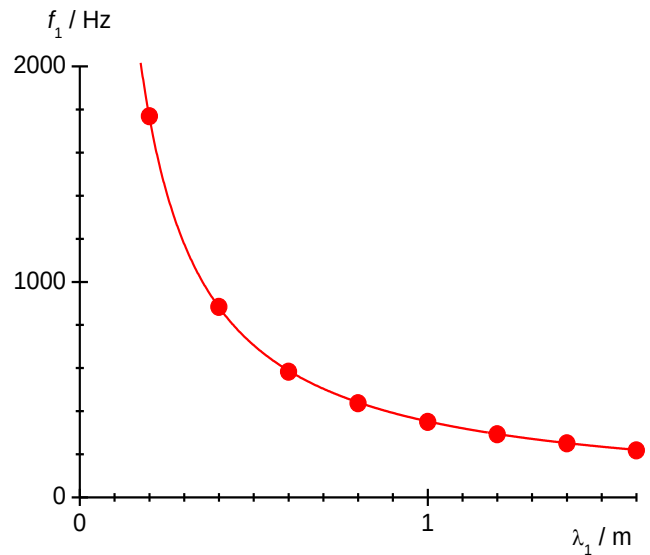


Fig. 4: Frequenz-Wellenlängen-Diagramm für die Grundschiwingungen ($n = 1$) bei unterschiedlichen Längen L .

Grundfrequenz in Abhängigkeit von der Länge

Nach Gleichung (9) gehören zu den ermittelten Resonanzfrequenzen f_1 der Grundschiwingungen die Wellenlängen

$$(11) \lambda_1 = 2 \cdot L.$$

- Wellenlängen nach Gleichung (11) berechnen und in Tab. 1 eintragen.
- Ermittelte Resonanzfrequenzen und berechnete Wellenlängen (Tab. 2) in einem f - λ -Diagramm darstellen (Fig. 4).
- Hyperbelfunktion an die Messpunkte anpassen:

$$(12) f_1 = a \cdot \frac{1}{\lambda_1}.$$

Die Anpassung bestätigt Gleichung (4). Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist gleich der Steigung a :

$$(13) c = a = 353 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der Wert weicht um ca. 2% vom Literaturwert $c = 346 \text{ m/s}$ bei $T = 25^\circ\text{C}$ ab.

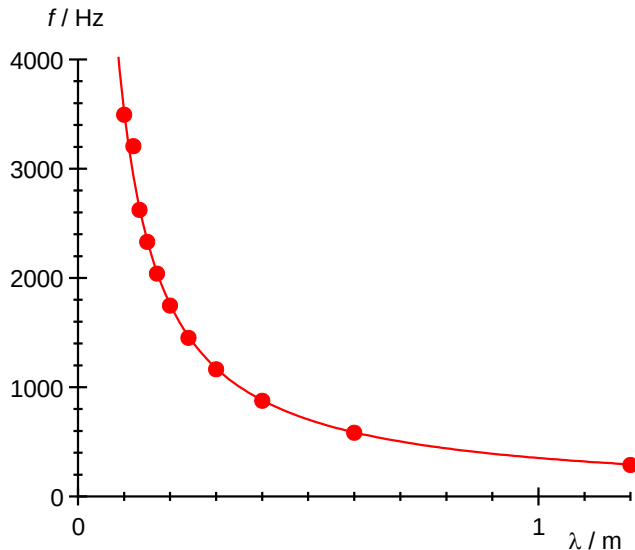


Fig. 5: Frequenz-Wellenlängen-Diagramm für Grund- und Oberschwingungen für $L = 0,6$ m.

Frequenzscan

Die Zeiten t_n , bei denen die Maxima des Frequenzscans vorliegen, können mit Hilfe der Kursoren des USB-Oszilloskops bestimmt werden. Diese Zeiten entsprechen nicht den Periodendauern T_n , die zu den Resonanzfrequenzen f_n gehören. Die Resonanzfrequenzen müssen aus den Parametern des Frequenzscans wie folgt berechnet werden:

$$(17) f_n = f_{\text{start}} + \frac{t_n}{T_{\text{sweep}}} \cdot (f_{\text{stop}} - f_{\text{start}}) = 100 \text{ Hz} + \frac{t_n}{4 \text{ s}} \cdot 5900 \text{ Hz}.$$

Daraus kann die Schallgeschwindigkeit wieder so ermittelt werden wie oben beschrieben.

Frequenzen von Grund- und Oberschwingung bei fester Länge

Nach Gleichung (9) gehören zu den ermittelten Resonanzfrequenzen f_n die Wellenlängen

$$(14) \lambda_n = \frac{2 \cdot L}{n}.$$

- Wellenlängen nach Gleichung (14) berechnen und in Tab. 2 eintragen.
- Ermittelte Resonanzfrequenzen und berechnete Wellenlängen (Tab. 2) in einem f - λ -Diagramm darstellen (Fig. 5).
- Hyperbelfunktion an die Messpunkte anpassen:

$$(15) f = a \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Die Anpassung bestätigt Gleichung (4). Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist gleich der Steigung a :

$$(16) c = a = 356 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der Wert weicht um ca. 3% vom Literaturwert $c = 346$ m/s bei $T = 25^\circ\text{C}$ ab.

