Mechanische Wellen

UNTERSUCHUNG VON STEHENDEN WELLEN AUF EINER GESPANNTEN SCHRAUBENFEDER UND EINEM GESPANNTEN SEIL.

- Erzeugung von stehenden Longitudinalwellen auf einer Schraubenfeder und stehenden Transversalwellen auf einem Seil.
- Messung der Eigenfrequenzen f_n in Abhängigkeit von der Zahl n der Knoten.
- Bestimmung der zugehörigen Wellenlängen λ_n und der Wellengeschwindigkeit c.

UE1050700

03/16 UD

Fig. 1: Messanordnung für die Untersuchung von stehenden Wellen auf einem gespannten Seil (links) und einer gespannten Schraubenfeder (rechts).

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Mechanische Wellen treten z.B. an einer gespannten Schraubenfeder oder einem gespannten Seil in Erscheinung. Bei der Schraubenfeder spricht man von Longitudinalwellen, da die Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung erfolgt. Seilwellen sind dagegen Transversalwellen. In beiden Fällen bilden sich stehende Wellen, wenn das Trägermedium an einem Ende fest eingespannt wird, da sich einlaufende und am festen Ende reflektierte Welle mit gleicher Amplitude und gleicher Wellenlänge überlagern. Ist auch das andere Ende fixiert, können sich Wellen nur ausbreiten, wenn Resonanzbedingungen erfüllt sind.

Sei $\xi(x,t)$ die longitudinale bzw. transversale Auslenkung am Ort x entlang des Trägermediums zur Zeit t (Fig. 2).

Dann ist

$$(1) \quad \xi_1(x,t) = \xi_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x)$$

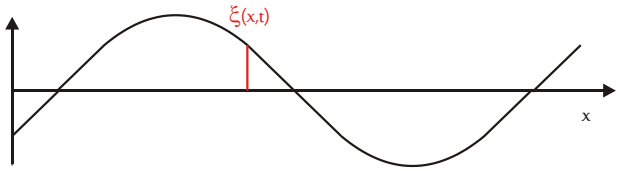

Fig. 2: Darstellung zur Definition der lokalen Auslenkung $\xi(x,t)$.

eine auf dem Trägermedium nach rechts laufende Sinuswelle. Die Frequenz f und die Wellenlänge λ sind hierbei durch die Beziehung

(2) $c = f \cdot \lambda$
c: Wellengeschwindigkeit

verknüpft. Wird diese Welle von links kommend bei $x = 0$ an einem festen Ende reflektiert, so entsteht die nach links laufende Welle

(3) $\xi_2(x,t) = -\xi_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x)$

Beide Wellen überlagern sich zur stehenden Welle

(4) $\xi(x,t) = 2\xi_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot \sin(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x)$

Diese Überlegungen gelten völlig unabhängig von der Art der Welle und des Trägermediums.

Ist auch das zweite Ende fixiert und befindet sich dieses bei $x = L$, muss für alle Zeiten t die Resonanzbedingung

(5) $\xi(L,t) = 0 = \sin(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot L)$

erfüllt sein. Daraus folgt für die Wellenlänge

(6a) $\frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot L = (n+1) \cdot \pi$ bzw. $\lambda_n = 2 \cdot \frac{L}{n+1}$

oder $L = (n+1) \cdot \frac{\lambda_n}{2}$

und gemäß Gl (2) für die Frequenz

(6b) $f_n = (n+1) \cdot \frac{c}{2 \cdot L}$

D.h. die Resonanzbedingung (5) erfordert, dass die Länge L genau ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist. Die Resonanzfrequenz muss zu dieser Wellenlänge passen. n ist hierbei die Zahl der Schwingungsknoten. Sie ist null, wenn sich bei der Grundschwingung nur ein Schwingungsbauch ausbildet (siehe Fig. 3).

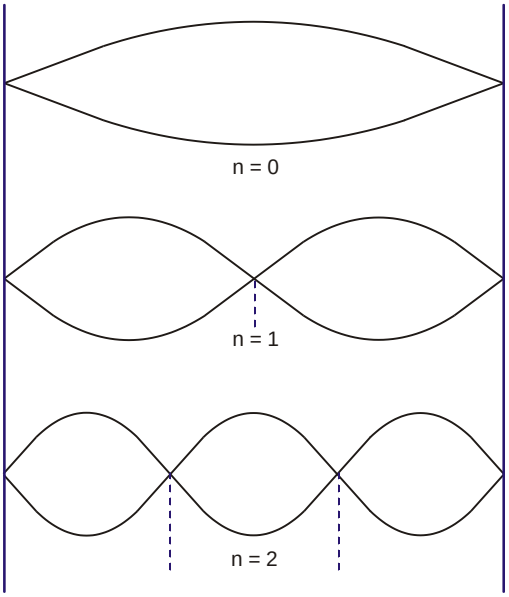

Fig. 3: Stehende Wellen.

Im Experiment ist das Trägermedium – ein Seil bzw. eine Schraubenfeder – an einem Ende fixiert. Das andere Ende ist im Abstand L mit einem Vibrationsgenerator verbunden, der durch einen Funktionsgenerator zu Schwingungen mit kleiner Amplitude und einstellbarer Frequenz f angetrieben wird. Auch dieses Ende kann näherungsweise als festes Ende betrachtet werden.

GERÄTELISTE

1	Zubehör Federschwingungen	1000703 (U56003)
1	Zubehör Seilwellen	1008540 (U85560081)
1	Vibrationsgenerator	1000701 (U56001)
1	Funktionsgenerator FG 100 @230V	1009957 (U8533600-230)
oder		
1	Funktionsgenerator FG 100 @115V	1009956 (U8533600-115)
1	Präzisionskraftmesser, 2 N	1003105 (U20033)
1	Taschenbandmaß, 2 m	1002603 (U10073)
1	Paar Sicherheitsexperimentierkabel, 75cm, rot/blau	1017718 (U13816)

AUFBAU

Schraubenfederwellen

- Die abgewinkelte Stativstange in der Halterung an der Rückseite des Vibrationsgenerators befestigen.
- Ein Ende der Schraubenfeder in die abgewinkelte Stativstange einhängen, am andere Ende mit Hilfe der Rändelschraube den Steckerstift befestigen.
- Die Schraubenfeder mit Hife des Steckerstifts am Vibrationsgenerator befestigen und auf diese Weise spannen.
- Die (effektive) Länge L der Schraubenfeder (Fig. 4a) auf ca. 30 cm einstellen. Ggf. Position der abgewinkelten Stativstange anpassen.
- Funktionsgenerator an den Vibrationsgenerator anschließen.

Seilwellen

- Vor Inbetriebnahme die Transportsicherung (Schraube mit Mutter) aus der Grundplatte entfernen.
- Die kurze Stativstange an der Grundplatte anschrauben. Die lange Stativstange in die kurze Stativstange einschrauben.
- Die Umlenkvorrichtung und den Halter für Kraftmesser auf die Stativstange aufschieben und an der Stange befestigen.
- Die Stativstange mit Steckerstift in der Halterung an der Rückseite des Vibrationsgenerators befestigen.
- Den Kraftmesser an den Halter hängen. Gegebenenfalls vorher Nullpunktkalibrierung durchführen.
- Das Gummiseil am Kraftmesser einhängen und unter der Umlenkvorrichtung zum Vibrationsgenerator führen. Dabei darauf achten, dass es möglichst parallel zur Tischplatte verläuft.
- Das Seil durch den Steckerstift am Schwingungserreger des Vibrationsgenerators und die Stativstange mit Steckerstift führen. Das Seil mit Hilfe der Rändelschraube zunächst nur an der Stativstange mit Steckerstift befestigen. Dies dient als Querzugentlastung für die Lautsprechermembran (Fig. 5).

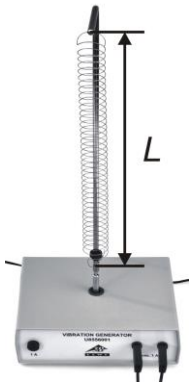

Fig. 4a: Illustration der (effektiven) Länge *L* der eingespannten Schraubenfeder.

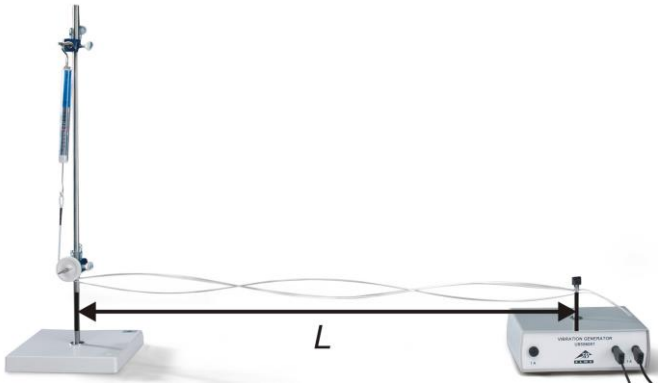

Fig. 4b: Illustration der (effektiven) Länge *L* des eingespannten Seils.

- Den Abstand zwischen Stativ mit Umlenkvorrichtung und Vibrationsgenerator so wählen, dass die (effektive) Länge *L* des Seils (Fig. 4b) ca. 90 cm beträgt. Das Seil mit Hilfe des Kraftmessers spannen ($F \approx 0{,}6$ N) und mit Hilfe der Rändelschraube am Steckerstift des Schwingungserregers nur noch leicht fixieren.
- Funktionsgenerator an den Vibrationsgenerator anschließen.

DURCHFÜHRUNG

- Effektive Längen *L* der eingespannten Schraubenfeder und des eingespannten Seils (Fig. 4a, b) messen und notieren.
- Am Funktionsgenerator die Wellenform „Sinus“ wählen. Amplitudensteller auf 5 V einstellen (12-Uhr-Stellung).
- Sowohl für die Schraubenfeder als auch für das Seil jeweils die Frequenz ausgehend von 1 Hz langsam in 0,1 Hz – Schritten hochfahren. Die Resonanzfrequenzen, bei denen sich kein Schwingungsknoten (ein Schwingungsbauch), ein Schwingungsknoten sowie zwei, drei, vier und fünf Schwingungsknoten ausbilden, in Tab. 1 und Tab. 2 notieren.
- Die Spannkraft des Seils nacheinander auf 1,0 N und 1,4 N erhöhen. Dazu den Kraftmesser am Stativstab nach oben verschieben. Messung jeweils wiederholen und Resonanzfrequenzen in Tab. 2 eintragen.
- Zur direkten Bestimmung der Massenbelegung des Seils die Gesamtlänge L_0 und die Masse *m* des Seils messen.

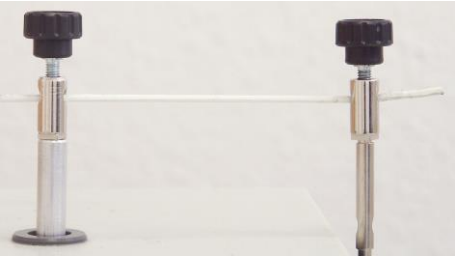

Fig. 5: Illustration der Querzugentlastung des eingespannten Seils.

MESSBEISPIEL

Länge der eingespannten Schraubenfeder *L*:	0,31 m
Länge des eingespannten Seils *L*:	0,90 m

Tab. 1: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Schraubenfederwellen.

n	f_n / Hz
0	7,7
1	15,4
2	23,0
3	30,6
4	38,6
5	45,7

Tab. 2: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Seilwellen bei verschiedenen Spannkräften.

n	f_n / Hz		
	F= 0,6 N	*F*= 1,0 N	*F*= 1,4 N
0	7,9	9,8	12,1
1	15,7	19,6	24,0
2	23,4	29,4	35,7
3	30,9	39,2	47,3
4	39,4	49,5	59,2
5	47,5	58,7	71,7

Gesamtlänge des Seils L_0:	1,05 m
Masse des Seils *m*:	3,3 g

AUSWERTUNG

Bestimmung der Wellengeschwindigkeit *c*

Trägt man die Resonanzfrequenz gegen die Zahl der Schwingungsknoten auf, liegen die Messpunkte nach Gleichung (6b) auf einer Geraden mit der Steigung

$$(7) \quad \alpha = \frac{c}{2 \cdot L} \Leftrightarrow c = 2 \cdot L \cdot \alpha \,.$$

Daraus lässt sich bei bekannter Länge L die Wellengeschwindigkeit c berechnen.

- Resonanzfrequenzen f_n für die Schraubenfederwellen (Tab. 1) und die Seilwellen (Tab. 2) gegen die Zahl der Schwingungsknoten n graphisch auftragen und jeweils Geraden anpassen (Fig. 6, Fig. 7).
- Aus den Geradensteigungen α die Wellengeschwindigkeiten c bestimmen und in Tab. 3 (Schraubenfederwellen) bzw. Tab. 4 (Seilwellen) eintragen.

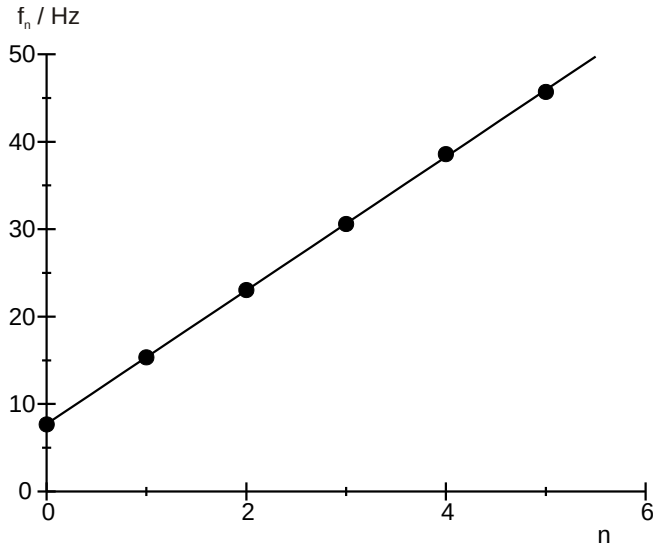

Fig. 6: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Schraubenfederwellen.

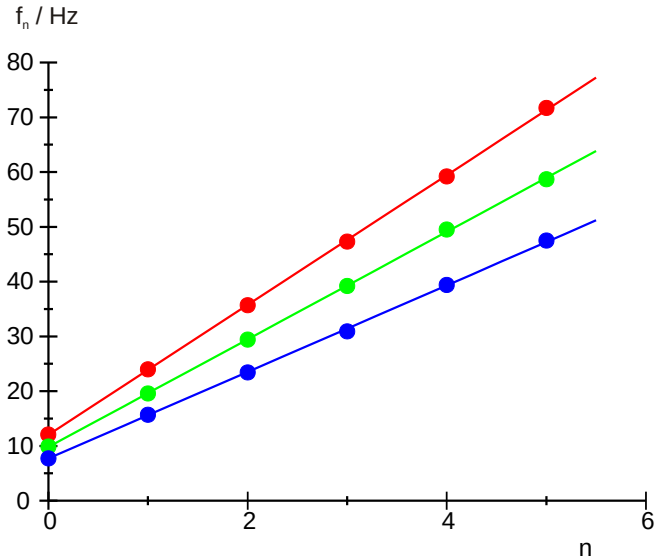

Fig. 7: Resonanzfrequenz in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Seilwellen bei Spannkräften F = 0,6 N (blau), F = 1,0 N (grün) und F = 1,4 N (rot).

Tab. 3: Steigung der angepassten Gerade und daraus bestimmte Wellengeschwindigkeit für die Schraubenfederwellen, Länge der (gespannten) Schraubenfeder L = 0,31 m.

α / Hz	c / m/s
7,6	4,7

Tab. 4: Steigung der angepassten Geraden, daraus bestimmte Wellengeschwindigkeiten und deren Quadrate für die Seilwellen bei verschiedenen Spannkräften, Länge des (gespannten) Seils L = 0,90 m.

F / N	α / Hz	c / m/s	c^2 / m²/s²
0,6	7,9	14,2	202
1,0	9,8	17,6	310
1,4	11,9	21,4	458

Bestimmung der zu den Resonanzfrequenzen f_n gehörigen Wellenlängen λ_n

- Die Wellenlängen λ_n einmal aus den Längen L und der Anzahl der Knoten n, und einmal aus den Resonanzfrequenzen f_n und den Wellengeschwindigkeiten c für die Schraubenfederwellen (Tab. 1, Tab. 3) und die Seilwellen (Tab. 2, Tab. 4) nach den Gleichungen (6a) und (2) berechnen und in Tab. 5 bzw. Tab. 6 eintragen.

Tab. 5: Wellenlänge in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Schraubenfederwellen, Länge der (gespannten) Schraubenfeder L = 0,31 m.

n	$\lambda_n = 2 \cdot \frac{L}{n+1}$	$\lambda_n = \frac{c}{f_n}$
0	0,62 m	0,62 m
1	0,31 m	0,31 m
2	0,21 m	0,21 m
3	0,16 m	0,16 m
4	0,12 m	0,12 m
5	0,10 m	0,10 m

Tab. 6: Wellenlänge in Abhängigkeit von der Knotenzahl für die Seilwellen, Länge des (gespannten) Seils L = 0,90 m.

n	$\lambda_n = 2 \cdot \frac{L}{n+1}$	$\lambda_n = \frac{c}{f_n}$		
		F= 0,6 N	F= 1,0 N	F= 1,4 N
0	1,80 m	1,80 m	1,80 m	1,77 m
1	0,90 m	0,90 m	0,90 m	0,89 m
2	0,60 m	0,61 m	0,60 m	0,60 m
3	0,45 m	0,46 m	0,45 m	0,45 m
4	0,36 m	0,36 m	0,36 m	0,36 m
5	0,30 m	0.30 m	0,30 m	0.30 m

Die Wellenlängen stimmen erwartungsgemäß sehr gut überein.

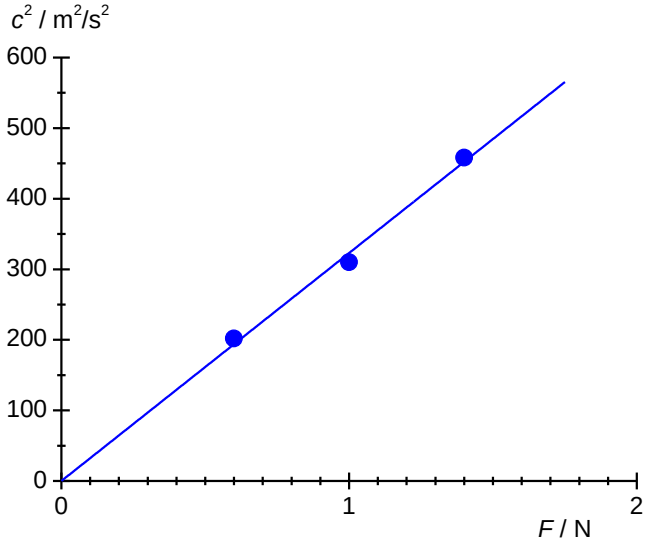

Fig. 8: Quadrat der Wellengeschwindigkeit c^2 der Seilwellen in Abhängigkeit von F.

Bestimmung der Massenbelegung μ des Seils

Die Wellengeschwindigkeit hängt bei sonst gleichen Parametern von der Spannkraft F ab, wie Fig. 7 bzw. Tab. 4 für die Seilwellen belegen. Es gilt:

$$(8) \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\mu} \cdot F \,.$$

F: Spannkraft
μ :Massenbelegung

- Quadrate der Wellengeschwindigkeiten c^2 berechnen, in Tab. 4 eintragen, gegen die Spannkraft F graphisch auftragen und eine Gerade anpassen (Fig. 8).
- Aus der Geradensteigung nach Gleichung (8) durch Kehrwertbildung die Massenbelegung μ des Seils bestimmen.

$$(9) \quad \mu = \frac{1}{323\,\frac{\text{m}}{\text{kg}}} = 0{,}0031\,\frac{\text{kg}}{\text{m}} = 3{,}10\,\frac{\text{g}}{\text{m}} \,.$$

- Die Massenbelegung direkt aus der gemessenen Länge und Masse eines Seilstücks bestimmen.

$$(10) \quad \mu = \frac{m}{L_0} = \frac{3{,}3\,\text{g}}{1{,}05\,\text{m}} = 3{,}14\,\frac{\text{g}}{\text{m}} \,.$$

Die Werte für die Massenbelegungen stimmen bis auf etwa 1% überein.

© Copyright 2016 3B Scientific GmbH