Mecânica

Oscilações

Oscilações acopladas

REGISTRO E ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES DE DOIS PÊNDULOS IDÊNTICOS E ACOPLADOS.

- Registro da oscilação em fase e determinação da sua duração de oscilação T_+.
- Registro da oscilação afásica e determinação da sua duração de oscilação T_-.
- Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima e determinação do seu período T assim como da duração de flutuação T_Δ.
- Comparação das durações medidas de flutuação e de período com os valores calculados a partir do período próprio T_- e T_+.
- Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas.

UE1050600

01/24 CW/DU

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Durante a oscilação de dois pêndulos acoplados, a energia de oscilação é transferida entre os ambos pêndulos de um lado para o outro. Se os pêndulos são idênticos e a sua oscilação é iniciada de modo que um dos pêndulos se encontre em posição de repouso enquanto o outro se encontra na posição de máxima amplitude, então, a transferência de energia é completa. Ou seja, a cada vez um dos pêndulos chega à posição de repouso total, enquanto que o outro oscila na sua amplitude máxima. O tempo transcorrido entre dois pontos de repouso de um dos pêndulos, ou em geral entre dois momentos nos quais o pêndulo oscila com a mínima amplitude, é chamado T_Δ.

As oscilações de dois pêndulos matemáticos idênticos e acoplados podem ser descritas como a superposição de duas oscilações próprias. Estas oscilações próprias podem ser observadas quando os pêndulos são levados a oscilar em fase ou de modo afásico. No primeiro caso os pêndulos oscilam sem influência do acoplamento com a freqüência do pêndulo não acoplado, no segundo caso, eles oscilam com a influência máxima do acoplamento com uma freqüência própria maior. Todas as outras oscilações podem ser representadas como sobreposições destas duas oscilações.

A equação de movimento dos pêndulos (para pequenos ângulos de amplitude φ_1 e φ_2) tem a forma:

$$\begin{aligned} L\cdot\ddot{\varphi}_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ L\cdot\ddot{\varphi}_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

g: aceleração da gravidade, L: comprimento do pêndulo, k: constante de acoplamento.

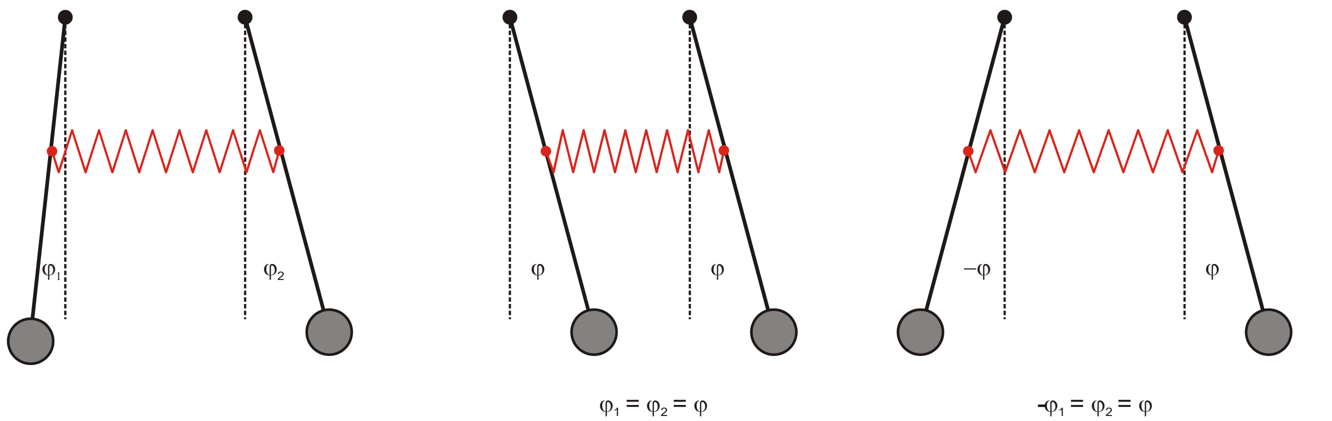

Fig. 1: Esquerda: oscilação acoplada em geral, meio: oscilação acoplada em fase, direita: oscilação acoplada afásica

Para as grandezas auxiliares (primeiro introduzidas de forma aleatória) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ e $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ resultam então as equações de movimento:

$$L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ = 0$$
$$L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- = 0 \quad (2)$$

Cujas soluções

$$\varphi_+ = a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \quad (3)$$

Com as freqüências circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ e } \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \quad (4)$$

correspondentes às oscilações próprias descritas com excitação em fase ou afásica (é válido $\varphi_+ = 0$ no caso da oscilação afásica e $\varphi_- = 0$ no caso da oscilação em fase).

Os balanços do pêndulo podem ser calculados a partir da soma ou da diferença das duas grandezas auxiliares, e assim obtém-se a solução

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)\right) \quad (5)$$

Sendo que aqui, os parâmetros a_+, a_-, b_+ e b_- são primeiramente grandezas aleatórias que podem ser calculadas a partir do estado de oscilação de ambos pêndulos no momento $t = 0$.

O caso a seguir é o mais fácil de se descrever, o qual é provocado quando o pêndulo 1 no momento 0 é deslocado do ponto zero num ângulo de amplitude φ_0 e logo largado, enquanto o pêndulo 2 se encontra em repouso no ponto zero.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \quad (6)$$

Após uma reformulação matemática obtém-se

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \quad (7)$$

com

$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \quad (8)$$

Isto corresponde à oscilação de ambos pêndulos com a mesma freqüência circular ω, sendo que as suas amplitude são moduladas com a freqüência circular ω_Δ. Uma tal modulação é chamada de flutuação. No caso presente, pode-se até falar de flutuação máxima, porque a amplitude atinge como valor mínimo o zero.

LISTA DE APARELHOS

2 Pêndulos de vara com registrador de ângulo @230 V
1000763 (U8404275-230)

ou

2 Pêndulos de vara com registrador de ângulo @115 V
1000762 (U8404275-115)

1 Mola helicoidal 3,9 N/m 1002945 (U15027)

2 Fixadores de mesa 1002832 (U1326)

2 Varas de apoio, 1000 mm 1002936 (U15004)

1 Vara de apoio, 470 mm 1002934 (U15002)

4 Mangas universais 1002830 (U13255)

2 Adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm
1002750 (U11259)

2 Sensores de voltagem 10 V 1021682 (UCMA-BT02)

1 Data logger

1 Software

Mais informações sobre a medição digital podem ser encontradas no site do produto na loja virtual da 3B.

MONTAGEM

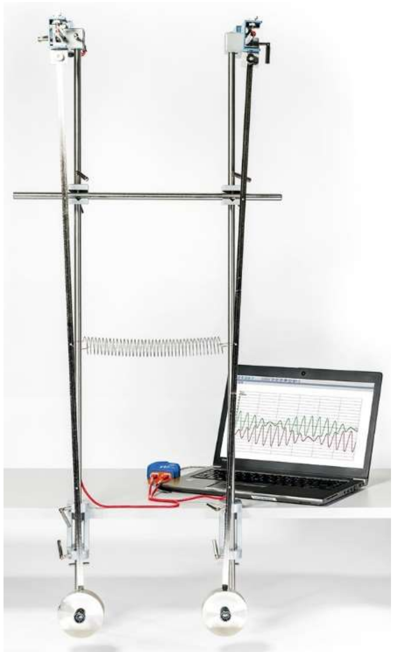

Fig. 2: Montagem para o registro e a análise das oscilações de dois pêndulos idênticos acoplados

A montagem está representada na fig. 2.

- Fixar as varas de apoio de 1000 mm de comprimento na mesa, a distâncias de aproximadamente 15 cm umas das outras, por meio das pinças de mesa.
- Instalar a vara de apoio curta na horizontal para proporcionar mais estabilidade à montagem.
- Fixar o registrador de ângulo por meio da manga universal na extremidade superior da vara de apoio vertical.

- Fixar as massas pendulares nas extremidades inferiores das varas dos pêndulos.
- Pendurar as varas de pêndulos no registrador de ângulo (para as pontas das varas de pêndulo foram previstos entalhos nas varas do registrador de ângulo).
- Pendurar a mola parafuso nos orifícios que se encontram nas varas dos pêndulos, os quais se encontram a uma distância de aproximadamente 40 cm do ponto de pendurar.
- Conectar os adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm nos registradores de ângulo e conectar os sensores de voltagem.
- Conectar os sensores de voltagem ao data logger.
- Conectar ambos registradores de ângulo à rede elétrica usando as fontes de alimentação.

EXECUÇÃO

- Iniciar o software e registrar as curvas de tempo dos sinais de tensão de ambos os sensores.

1. Registro da oscilação de fase idêntica

- Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude na mesma direção e solta-los simultaneamente.

2. Registro da oscilação em contra fase

- Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude em direções contrárias e solta-los simultaneamente.

3. Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Se necessário, aumente o número de valores medidos.
- Deslocar uma das varas de pêndulo, segurando a outra no ponto zero e soltar ambas simultaneamente.

EXEMPLOS DE MEDIÇÃO

1. Oscilações em fase acopladas

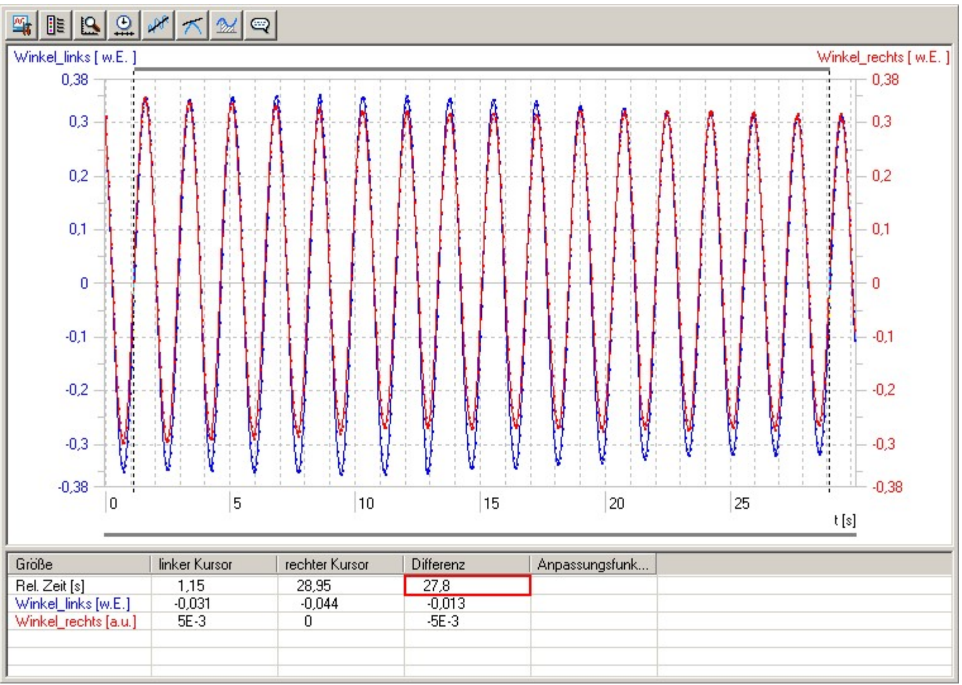

Fig. 3: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

2. Oscilação acoplada em contra fase

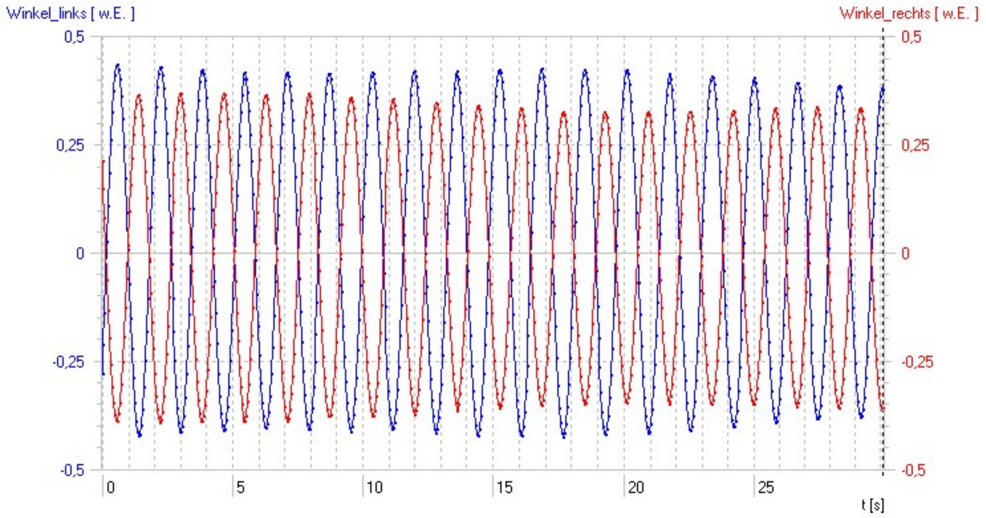

Fig. 4: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em contra fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

3. Oscilação acoplada com flutuação máxima

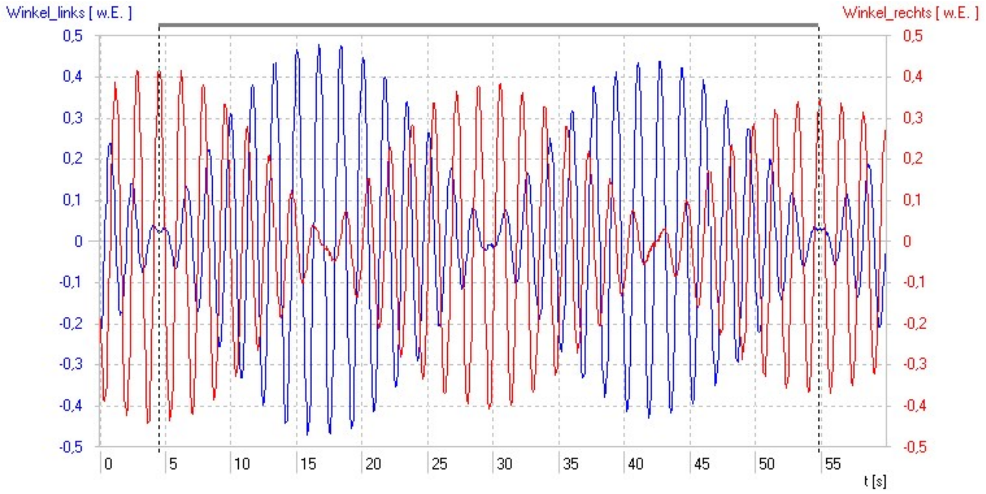

Fig. 5: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada de flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

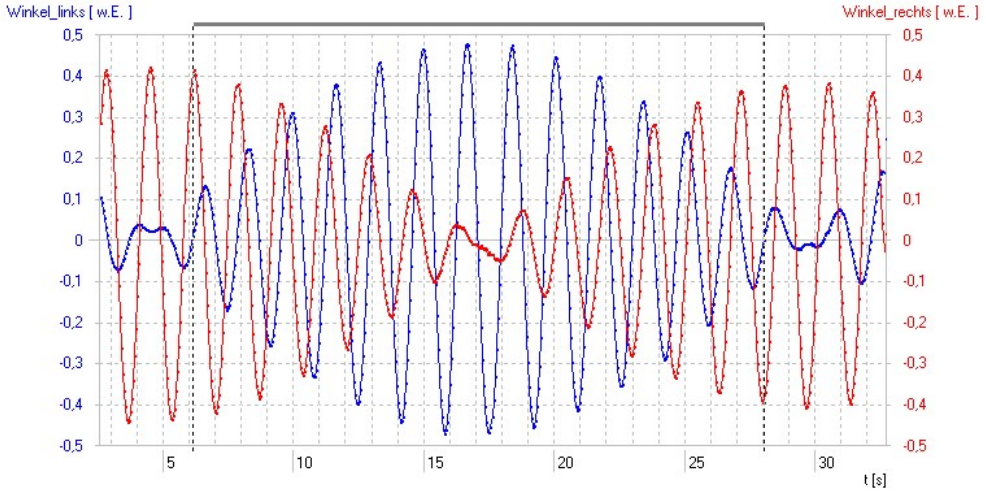

Fig. 6: Representação ampliada de um período de flutuação da oscilação acoplada com flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada

ANÁLISE

1. Determinação do período de uma oscilação acoplada em fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em fase.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo no diagrama, para tal, levar cada um de ambos cursores exatamente sobre a passagem a zero de um flanco ascendente, de modo que um número inteiro de períodos seja incluído (comparar Fig. 3).
- Ler o intervalo de tempo dos cursores (fig. 3, quadro vermelho).

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_+ = \frac{27{,}8\ \text{s}}{16} = 1{,}737\ \text{s}$$

2. Determinação do período de uma oscilação acoplada em contra fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em contra fase e proceder do mesmo modo.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$T_- = 1{,}629$ s

3. Determinação do período de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Abrir o jogo de dados da oscilação com flutuação máxima.
- Incluir com o cursor um, ou se possível, vários períodos de oscilação (comparar fig. 5) e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos de flutuação incluídos resulta na duração do período de flutuação

$T_\Delta = 25$ s

- Alterar a escala do eixo de tempo de modo que um período de flutuação seja representado de forma ampliada.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo dentro um período de flutuação (intervalo de tempo entre duas paradas do pendulo na posição de repouso) (comparar fig. 6) e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$T = 1{,}685$ s

4. Comparação dos períodos de flutuação e de oscilação com os valores calculados a partir do período de oscilação próprio

Para o período T da oscilação acoplada com flutuação máxima resulta de (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1{,}681\ \text{s} \tag{9}$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido $T = 1{,}685$ s.

De modo semelhante calcula-se o período de flutuação T_Δ. No entanto, deve-se levar em conta que este normalmente é definido como o tempo transcorrido entre dois momentos imóveis do pêndulo na posição de repouso. Isto corresponde à metade da duração do período do termo de co-seno ou seno modulador em (7).

$$T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26\ \text{s} \tag{10}$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido $T_\Delta = 25$ s.

O desvio de aproximadamente um segundo do valor medido pode parecer grosseiro a primeira vista, este reside porém, na dependência delicada da diferença dos períodos próprios. Mesmo um desvio de uns quatro milissegundos, o que se situa no quadro da precisão de medição máxima para o período próprio possível nesta experiência, já implica uma alteração do período da flutuação de um segundo.

5. Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas

A constante de elasticidade das molas acopladas D depende da constante de acoplamento k da seguinte maneira:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{11}$$

(d: distância entre a fixação das molas acopladas e o ponto onde está pendurado o pêndulo).

No caso de acoplamento fraco ($k << g$), a constante de elasticidade só tem uma influência limitada sobre o período da oscilação em contra fase, mas tem grande influência no período de flutuação. Por isso deve-se utilizar uma relação ao período de flutuação para se determinar a constante de elasticidade, a qual é obtida quando se aplica (4) em (8) e logo se a transforma para k.

$$k = 2 \cdot L \cdot \left(\omega_\Delta^2 - \omega_\Delta \cdot \omega_+\right) \tag{12}$$

Agora expressam-se as freqüências circulares através de períodos de oscilação e se as aplica em (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_\Delta} + \frac{T_+{}^2}{T_\Delta{}^2}\right) = 3{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \tag{13}$$