

Oscilações acopladas

REGISTRO E ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES DE DOIS PÊNDULOS IDÊNTICOS E ACOPLADOS.

- Registro da oscilação em fase e determinação da sua duração de oscilação T_+ .
- Registro da oscilação afásica e determinação da sua duração de oscilação T_- .
- Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima e determinação do seu período T assim como da duração de flutuação T_Δ .
- Comparação das durações medidas de flutuação e de período com os valores calculados a partir do período próprio T_- e T_+ .
- Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas.

UE1050600

06/24 CW/DU

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Durante a oscilação de dois pêndulos acoplados, a energia de oscilação é transferida entre os ambos pêndulos de um lado para o outro. Se os pêndulos são idênticos e a sua oscilação é iniciada de modo que um dos pêndulos se encontre em posição de repouso enquanto o outro se encontra na posição de máxima amplitude, então, a transferência de energia é completa. Ou seja, a cada vez um dos pêndulos chega à posição de repouso total, enquanto que o outro oscila na sua amplitude máxima. O tempo transcorrido entre dois pontos de repouso de um dos pêndulos, ou em geral entre dois momentos nos quais o pêndulo oscila com a mínima amplitude, é chamado T_Δ .

As oscilações de dois pêndulos matemáticos idênticos e acoplados podem ser descritas como a superposição de duas oscilações próprias. Estas oscilações próprias podem ser observadas quando os pêndulos são levados

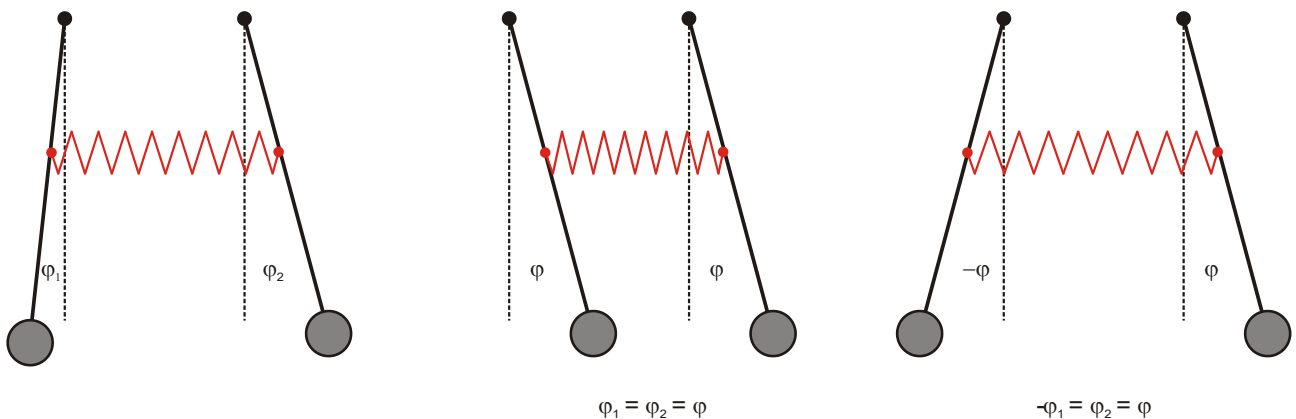
a oscilar em fase ou de modo afásico. No primeiro caso os pêndulos oscilam sem influência do acoplamento com a frequência do pêndulo não acoplado, no segundo caso, eles oscilam com a influência máxima do acoplamento com uma frequência própria maior. Todas as outras oscilações podem ser representadas como sobreposições destas duas oscilações.

A equação de movimento dos pêndulos (para pequenos ângulos de amplitude φ_1 e φ_2) tem a forma:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

g : aceleração da gravidade, L : comprimento do pêndulo, k : constante de acoplamento.

Fig. 1: Esquerda: oscilação acoplada em geral, meio: oscilação acoplada em fase, direita: oscilação acoplada afásica



A constante de elasticidade das molas acopladas D depende da constante de acoplamento k da seguinte maneira:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \tag{2}$$

d : distância entre a fixação das molas acopladas e o ponto onde está pendurado o pêndulo, m : Massa do pêndulo

Para as grandezas auxiliares (primeiro introduzidas de forma aleatória) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ e $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ resultam então as equações de movimento:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Cujas soluções

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{4}$$

Com as frequências circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \tag{5}$$

e os períodos de oscilação

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g + 2k}} \tag{6}$$

correspondentes às oscilações próprias descritas com excitação em fase ou afásica (é válido $\varphi_+ = 0$ no caso da oscilação afásica e $\varphi_- = 0$ no caso da oscilação em fase).

Os balanços do pêndulo podem ser calculados a partir da soma ou da diferença das duas grandezas auxiliares, e assim obtém-se a solução:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{7}$$

Sendo que aqui, os parâmetros a_+ , a_- , b_+ e b_- são primeiramente grandezas aleatórias que podem ser calculadas a partir do estado de oscilação de ambos pêndulos no momento $t = 0$.

O caso a seguir é o mais fácil de se descrever, o qual é provocado quando o pêndulo 1 no momento 0 é deslocado do ponto zero num ângulo de amplitude φ_0 e logo largado, enquanto o pêndulo 2 se encontra em repouso no ponto zero:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \tag{8}$$

Após uma reformulação matemática obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{9}$$

com

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad \omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \tag{10}$$

e

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-}, \quad T_\Delta = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{11}$$

Isto corresponde à oscilação de ambos pêndulos com a mesma frequência circular ω , sendo que as suas amplitude são moduladas com a frequência circular ω_Δ . Uma tal modulação é chamada de flutuação. No caso presente, pode-se até falar de flutuação máxima, porque a amplitude atinge como valor mínimo o zero.

Como a duração de suspensão T_Δ é geralmente entendida como o tempo entre dois momentos de repouso dos pêndulos, definimos:

$$\omega_\Delta = \frac{2\pi}{2T_\Delta} \Leftrightarrow T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \tag{12}$$

LISTA DE APARELHOS

- 2 Pêndulos de vara com sensor de ângulo @230 V 1000763 (U8404275-230)
 - ou
 - 2 Pêndulos de vara com sensor de ângulo @115 V 1000762 (U8404275-115)
 - 1 Mola helicoidal 3,9 N/m 1002945 (U15027)
 - 2 Fixadores de mesa 1002832 (U1326)
 - 2 Varas de apoio, 1000 mm 1002936 (U15004)
 - 1 Vara de apoio, 470 mm 1002934 (U15002)
 - 4 Mangas universais 1002830 (U13255)
 - 2 Adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm 1002750 (U11259)
 - 2 Sensores de voltagem 10 V 1021682 (UCMA-BT02)
 - 1 Data logger
 - 1 Software
- Mais informações sobre a medição digital podem ser encontradas no site do produto na loja virtual da 3B.

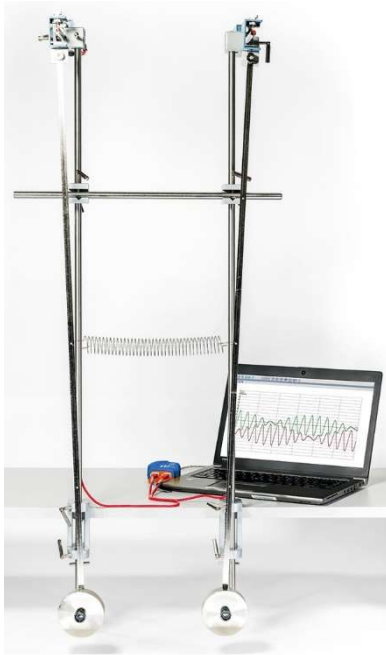


Fig. 2: Montagem para o registro e a análise das oscilações de dois pêndulos idênticos acoplados

EXECUÇÃO

- Iniciar o software e registrar as curvas de tempo dos sinais de tensão de ambos os sensores.
- 1. Registro da oscilação de fase idêntica**
 - Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude na mesma direção e solta-los simultaneamente.
 - 2. Registro da oscilação em contra fase**
 - Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude em direções contrárias e solta-los simultaneamente.
 - 3. Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima**
 - Se necessário, aumente o número de valores medidos.
 - Deslocar uma das varas de pêndulo, segurando a outra no ponto zero e soltar ambas simultaneamente.

MONTAGEM

A montagem está representada na fig. 2.

- Fixar as varas de apoio longas de comprimento na mesa, a distâncias de aproximadamente 15 cm umas das outras, por meio das pinças de mesa.
- Instalar a vara de apoio curta na horizontal para proporcionar mais estabilidade à montagem.
- Fixar o sensor de ângulo por meio da manga universal na extremidade superior da vara de apoio vertical.
- Fixar as massas pendulares nas extremidades inferiores das varas dos pêndulos.
- Pendurar as varas de pêndulos no sensor de ângulo (para as pontas das varas de pêndulo foram previstos entalhos nas varas do sensor de ângulo).
- Pendurar a mola parafuso nos orifícios no centro de cada haste do pêndulo (a 50 cm das extremidades).
- Conectar os adaptadores com plugue BNC/tomadas de 4 mm nos sensores de ângulo e conectar os sensores de voltagem.
- Conectar os sensores de voltagem ao data logger.
- Conectar ambos sensores de ângulo à rede elétrica usando as fontes de alimentação.

EXEMPLOS DE MEDIÇÃO

1. Oscilações em fase acopladas

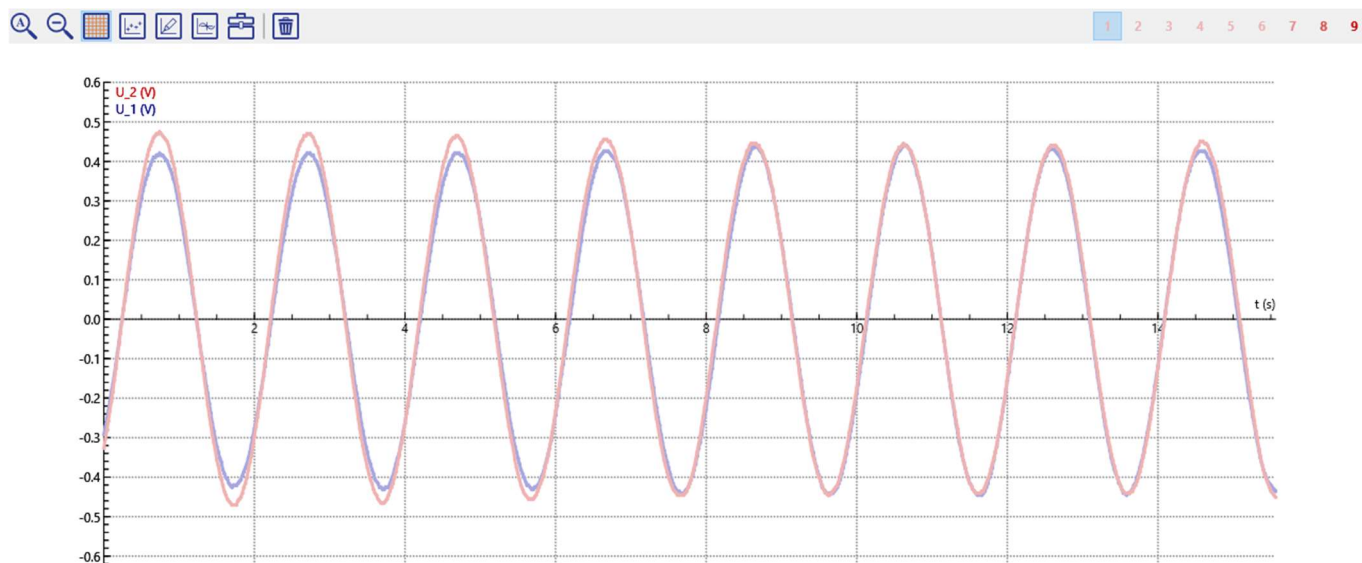


Fig. 3: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em fase

2. Oscilação acoplada em contra fase

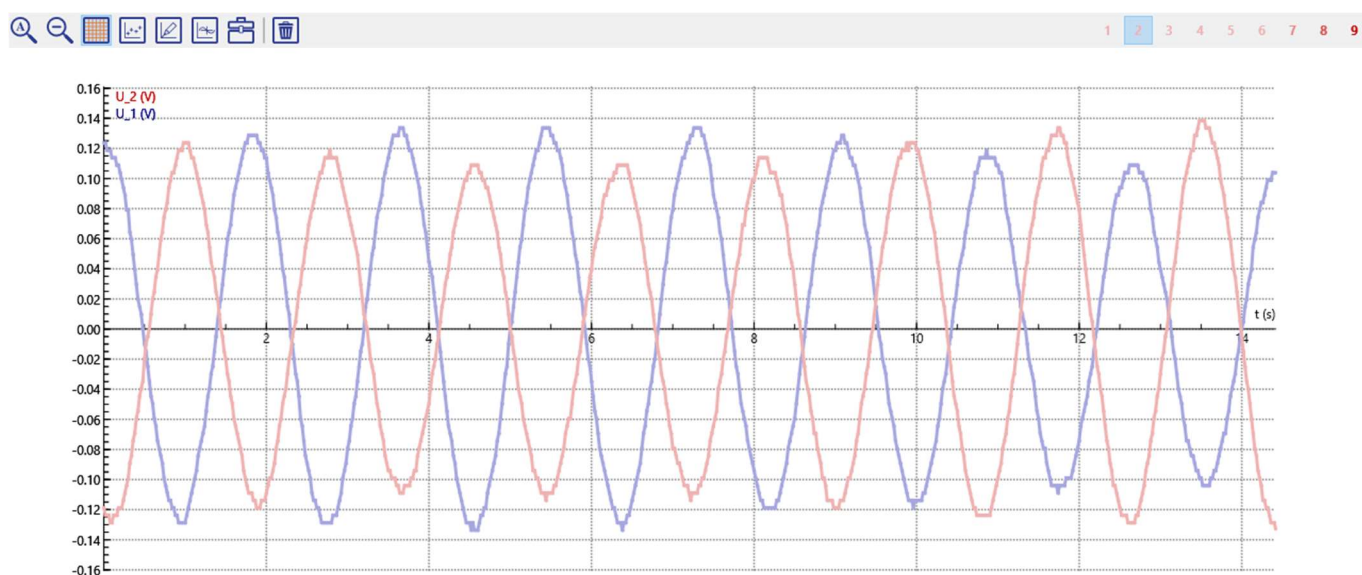


Fig. 4: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em contra fase

3. Oscilação acoplada com flutuação máxima

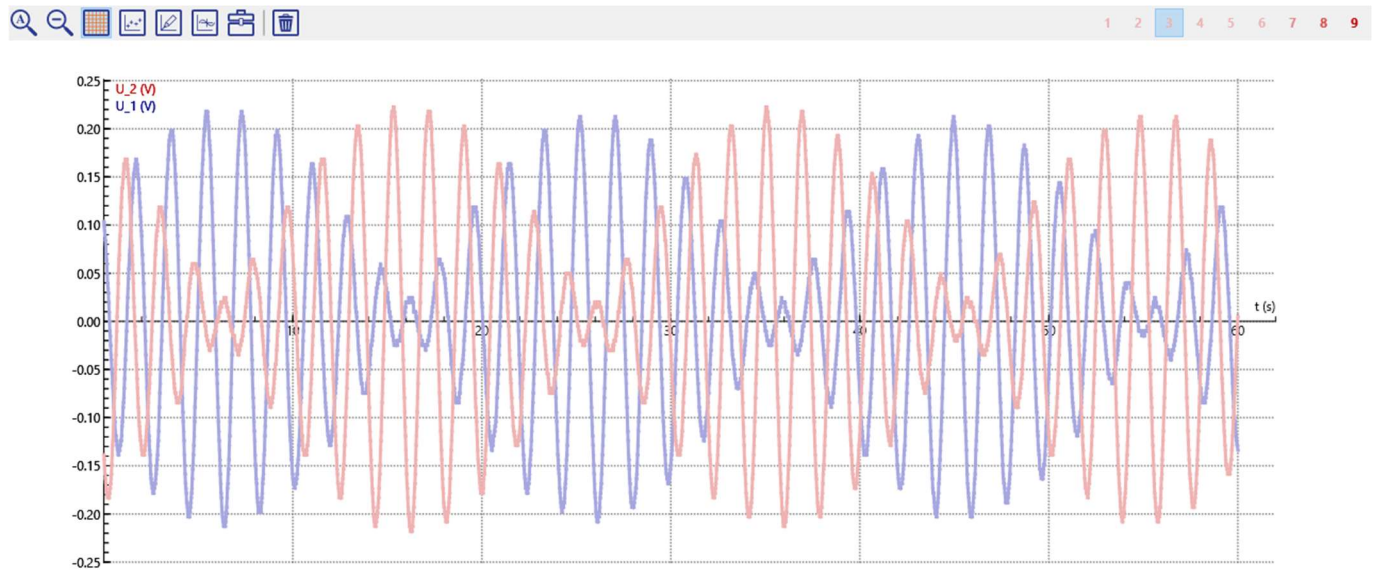


Fig. 5: Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada de flutuação máxima

ANÁLISE

1. Determinação do período de uma oscilação acoplada em fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em fase (Fig. 3).
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo no diagrama, para tal, levar cada um de ambos cursores exatamente sobre a passagem a zero de um flanco ascendente, de modo que um número inteiro de períodos seja incluído.
- Ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_+ = \frac{13,80 \text{ s}}{7} = 1,97 \text{ s.}$$

2. Determinação do período de uma oscilação acoplada em contra fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em contra fase (Fig. 4) e proceder do mesmo modo.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_- = \frac{12,50 \text{ s}}{7} = 1,79 \text{ s.}$$

3. Determinação do período de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Abrir o jogo de dados da oscilação com flutuação máxima (Fig. 5).
- Incluir com o cursor um, ou se possível, vários períodos de oscilação e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos de flutuação incluídos resulta na duração do período de flutuação

$$T_{\Delta} = 19,72 \text{ s.}$$

- Alterar a escala do eixo de tempo de modo que um período de flutuação seja representado de forma ampliada.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo dentro um período de flutuação (intervalo de tempo entre duas paradas do pêndulo na posição de repouso) e ler o intervalo de tempo dos cursores.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T = \frac{19,72 \text{ s}}{11} = 1,79 \text{ s.}$$

4. Comparação com a teoria

Com o comprimento do pêndulo $L = 0,995 \text{ m}$ (distância da massa do pêndulo do ponto onde está pendurado o pêndulo), a distância entre a fixação das molas acopladas e o ponto onde está pendurado o pêndulo $d = 0,535 \text{ m}$, a massa do pêndulo $m = 1 \text{ kg}$, a constante de mola da mola de acoplamento $D = 3,9 \text{ N/m}$ e a aceleração gravitacional $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, as equações (2) e (6) resultam em

$$k = 1,122 \text{ m/s}^2$$

$$T_+ = 2,00 \text{ s}$$

$$T_- = 1,81 \text{ s}$$

Os valores determinados experimentalmente $T_+ = 1,97 \text{ s}$ e $T_- = 1,79 \text{ s}$ devem ser comparados com esses valores. Substituindo esses últimos nas equações (11) e (12), obtemos

$$T = 1,88 \text{ s}$$

$$T_{\Delta} = 19,59 \text{ s}$$

Os valores determinados experimentalmente $T = 1,79 \text{ s}$ e $T_{\Delta} = 19,72 \text{ s}$ devem ser comparados com esses valores.

Os valores determinados experimentalmente concordam bem com a teoria em cada caso; os desvios relativos estão na faixa de porcentagem de um dígito e chegam a um máximo de 5%.

5. Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas

No caso de acoplamento fraco ($k \ll g$), a constante de elasticidade (2) só tem uma influência limitada sobre o período da oscilação em contra fase, mas tem grande influência no período de flutuação. Por isso deve-se utilizar uma relação ao período de flutuação para se determinar a constante de elasticidade, a qual é obtida quando se aplica (5) em (10) e logo se a transforma para k .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (13)$$

Agora expressam-se as frequências circulares através de períodos de oscilação e se as aplica em (2).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (14)$$

O valor se desvia do valor nominal de 3,9 N/m aproximadamente 8%.