

Oscilaciones acopladas

REGISTRO Y ANÁLISIS DE LAS OSCILACIONES DE DOS PÉNDULOS IDÉNTICOS Y ACOPLADOS.

- Registro de la oscilación equifásica y determinación de su frecuencia de oscilación T_+ .
- Registro de la oscilación en oposición de fase y determinación de su frecuencia de oscilación T_- .
- Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos y determinación del período de oscilación T así como el período de los batidos T_Δ .
- Comparación de los períodos de los batidos y de la oscilación con los valores calculados a partir de las oscilaciones propias T y T_+ .
- Determinación de la constante del muelle de acoplamiento.

UE1050600

06/24 CW/UD

FUNDAMENTOS GENERALES

En la oscilación de dos péndulos acoplados, la energía se transmite entre los dos péndulos en ambas direcciones. Si los péndulos son iguales y se excitan a una oscilación de tal forma que al principio uno de los péndulos se encuentre en su posición de reposo, la transmisión de la energía es total. Esto significa que un péndulo llega por completo al estado de reposo mientras el otro oscila con máxima amplitud. El tiempo transcurrido entre dos estados de reposo de un péndulo o, en general, entre dos instantes diferentes en los que el péndulo oscila con amplitud mínima, se denomina frecuencia de batido T_Δ .

Las oscilaciones de dos péndulos matemáticos idénticos y acoplados se pueden describir como superposiciones de dos oscilaciones propias. Es posible observar estas oscilaciones propias si se provoca la oscilación de ambos péndulos en fases iguales u opuestas. En el primer caso, los péndulos oscilan sin influencia del acoplamiento, con frecuencia de péndulo desacoplado; en el

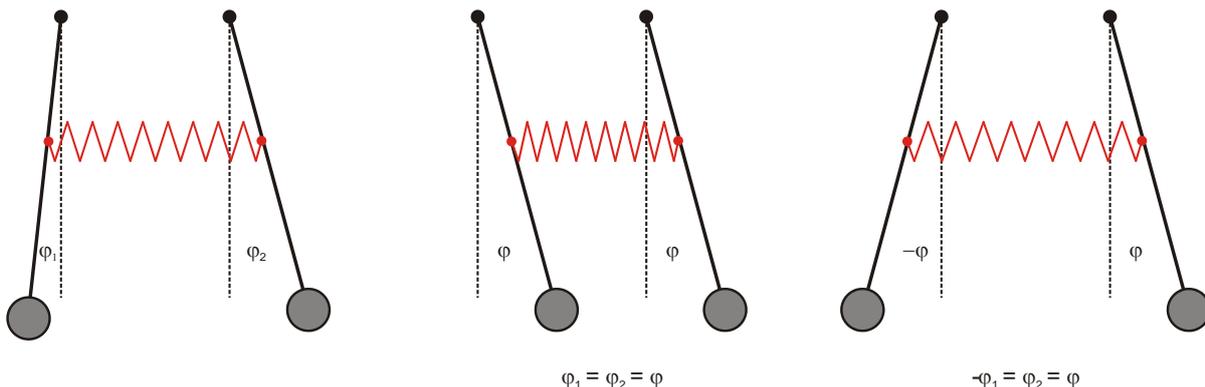
segundo caso, oscilan con la máxima influencia del acoplamiento y la mayor frecuencia propia. Todas las demás oscilaciones son representables como superposiciones de estas dos oscilaciones propias.

Las ecuaciones de movimiento de los péndulos indican (para desviaciones pequeñas φ_1 y φ_2) lo siguiente:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

g : aceleración de caída, L : longitud del péndulo, k : constante de acoplamiento

Fig. 1: Izquierda: oscilación acoplada general; centro: oscilación acoplada equifásica; derecha: oscilación acoplada en oposición de fase



La constante del muelle de acoplamiento D está relacionada con la constante de acoplamiento k de la siguiente manera:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (2)$$

d : Distancia entre el punto de fijación del muelle de acoplamiento y el punto de suspensión del péndulo, m : Masa del péndulo

Para las variables auxiliares (introducidas, en primer lugar, arbitrariamente) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ y $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Cuyas resoluciones

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \quad (4)$$

corresponden a las frecuencias circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \quad (5)$$

y los periodos de oscilación

$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g + 2k}} \quad (6)$$

de las oscilaciones propias descritas con excitación equifásica o en oposición de fase (es válido $\varphi_+ = 0$ en el caso de equifase y $\varphi_- = 0$ para oscilación en oposición de fase).

Las desviaciones de los péndulos se pueden calcular a partir de la suma o la diferencia de ambas variables auxiliares, con lo que se obtiene la solución

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (7)$$

Aquí, los parámetros a_+ , a_- , b_+ y b_- son, en primer lugar, variables arbitrarias, que se pueden calcular a partir del estado de oscilación de ambos péndulos en el instante en que $t = 0$.

El más sencillo de interpretar es el siguiente caso, que se excita cuando el péndulo 1, en el momento 0 se desvía un ángulo φ_0 de su posición de reposo y se deja libre, mientras el péndulo 2 se encuentra en su posición de reposo 0.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (8)$$

Tras la transformación matemática se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

en donde

$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad \omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \quad (10)$$

y

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-}, \quad T_\Delta = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \quad (11)$$

Esto corresponde a una oscilación de ambos péndulos con la misma frecuencia angular ω , en donde sus amplitudes se modulan con la frecuencia angular ω_Δ . Esta clase de modulación se denomina batido. En el presente caso se puede hablar hasta de un batido máximo, porque la amplitud logra llegar a su mínimo valor igual a cero.

Como el periodo de batido T_Δ se entiende normalmente como el tiempo que transcurre entre dos estados de reposo de los péndulos, se define de la siguiente manera:

$$\omega_\Delta = \frac{2\pi}{2T_\Delta} \Leftrightarrow T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} \quad (12)$$

LISTA DE EQUIPOS

- 2 Péndulos de barra con sensor de ángulo @230 V
1000763 (U8404275-230)
 - o
 - 2 Péndulos de barra con sensor de ángulo @115 V
1000762 (U8404275-115)
 - 1 Resorte helicoidal 3,9 N/m 1002945 (U15027)
 - 2 Pinzas de mesa 1002832 (U1326)
 - 2 Varillas de soporte, 1000 mm
1002936 (U15004)
 - 1 Varilla de soporte, 470 mm
1002934 (U15002)
 - 4 Nueces 2ension2ls 1002830 (U13255)
 - 2 Adaptadores conector macho BNC/
casquillos de 4 mm 1002750 (U11259)
 - 2 Sensores de 2ension de 10 V
1021682 (UCMA-BT02)
 - 1 Data logger
 - 1 Software
- Encontrará más información sobre la medición digital en el sitio web del producto, en la tienda virtual de 3B.

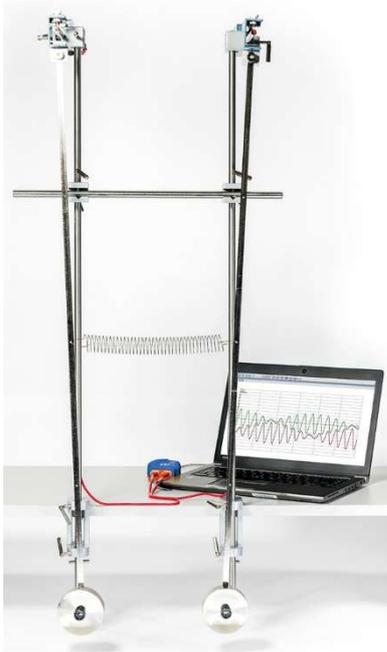


Fig. 2: Montaje para el registro y la evaluación de las oscilaciones de dos péndulos acoplados iguales

EJECUCIÓN

- Se inicia el software y se registran las curvas temporales de las señales de tensión de ambos sensores.
- 1. Registro de las oscilaciones en fase**
 - Ambos péndulo se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) en la misma dirección y luego se dejan libres al mismo tiempo.
 - 2. Registro de las oscilaciones en contrafase**
 - Ambos péndulos se desvían de la posición de reposo en un ángulo igual (pequeño) pero en direcciones contrarias la una de la otra y se dejan libres al mismo tiempo.
 - 3. Registro de oscilaciones acopladas con batidos máximos**
 - Si es necesario, aumente el número de valores medidos.
 - Una varilla pendular se desvía de la posición de reposo y la otra se mantiene en la posición de reposos y luego se dejan libres al mismo tiempo.

MONTAJE

El montaje se representa en la Fig. 2.

- Utilizando pinzas de mesa se fijan en el borde de la mesa de trabajo las varillas soporte largas a una distancia entre sí de aprox. 15 cm.
- Con la varilla soporte corta se acoplan horizontalmente las dos varillas largas, para darle más estabilidad al sistema.
- Por medio de nueces universales se fija un sensor de ángulo en el extremo superior de cada una de las varillas soporte verticales.
- Se fija una masa pendular en el extremo inferior de cada una de las varillas pendulares verticales.
- Se cuelgan las varillas pendulares en los sensores de ángulo (para las espigas de la suspensión del péndulo se tienen muescas en cada una de las barras de los sensores de ángulo).
- Se acopla el muelle helicoidal en los orificios de las varillas pendulares, en el centro de éstas (a 50 cm de sus extremos).
- Se conectan los adaptadores conector macho BNC/casquillos de 4 mm a los sensores de ángulo y se conectan los sensores de tensión.
- Se conectan los sensores de tensión al data logger.
- Se conectan los sensores de ángulo a la red eléctrica mediante las fuentes de alimentación enchufables.

EJEMPLO DE MEDICIÓN

1. Registro de las oscilaciones en fase

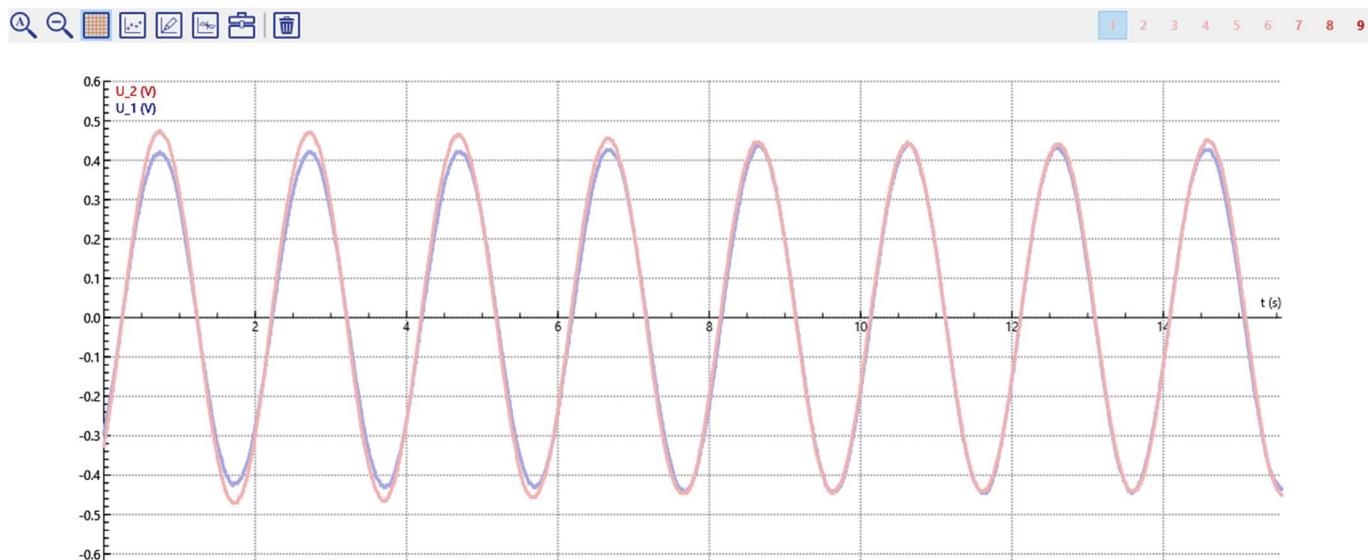


Fig. 3: Diagrama de la desviación con el tiempo de las oscilaciones acopladas en fase

2. Oscilaciones acopladas en contrafase

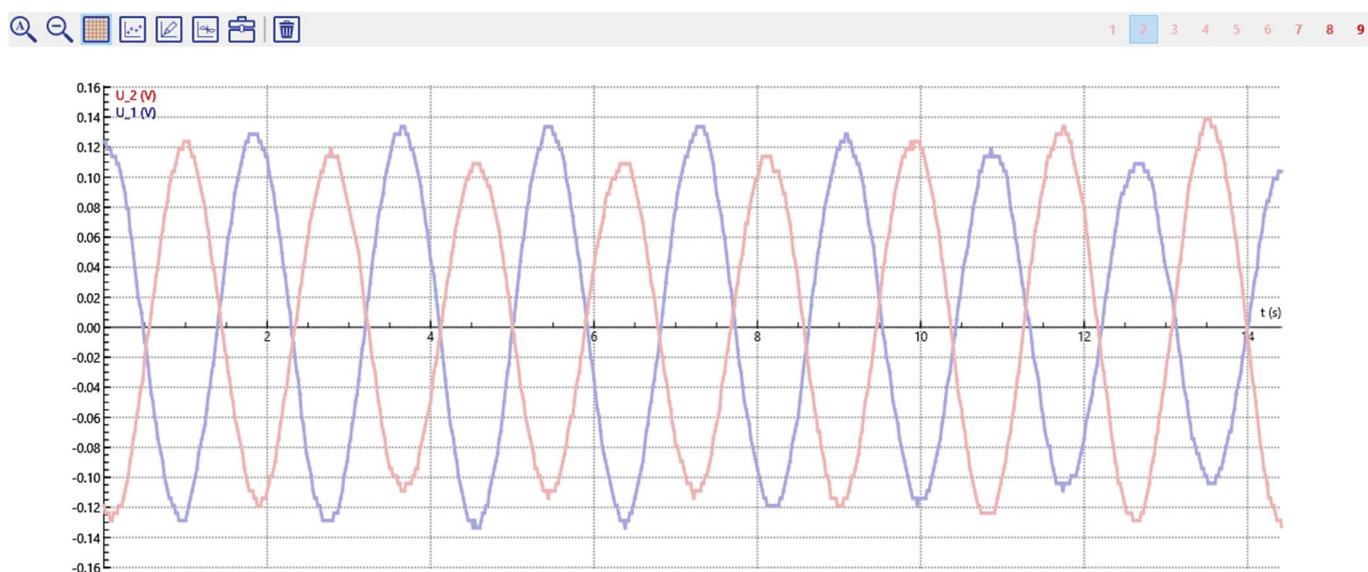


Fig. 4: Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas en contrafase

3. Oscilaciones acopladas con batidos máximos

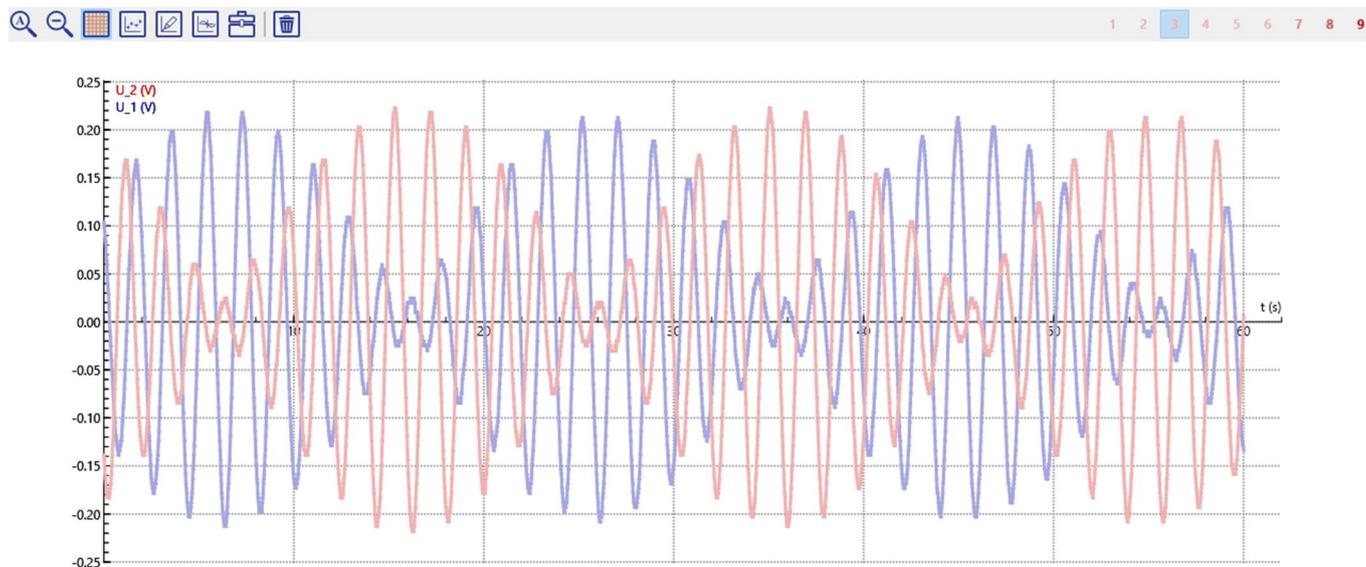


Fig. 5: Diagrama de desviación con el tiempo de oscilaciones acopladas con batidos máximos

EVALUACIÓN

1. Determinación del período de oscilaciones acopladas en fase

- Se abre el juego de datos de las oscilaciones acopladas en fase (Fig. 3).
- En el diagrama se incluyen en medio de los cursores un número grande de oscilaciones, para ello, se coloca cada uno de ellos en el paso por cero de un flanco positivo para que se encierre un número completo de períodos.
- Se lee la distancia en el tiempo de los dos cursores.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_+ = \frac{13,80 \text{ s}}{8} = 1,97 \text{ s.}$$

2. Determinación del período de las oscilaciones acopladas en contrafase

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas en contrafase (Fig. 4) y se procede de la misma forma.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T_- = \frac{12,50 \text{ s}}{7} = 1,79 \text{ s.}$$

3. Determinación del período de las oscilaciones acopladas con batidos máximos

- Se abre un juego de datos para las oscilaciones acopladas con batidos máximos (Fig. 5).
- Con los dos cursores se encierra un y si es posible varios períodos de batidos y se lee la distancia temporal.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de los batidos.

$$T_{\Delta} = 19,72 \text{ s.}$$

- Se cambia la escala del eje de los tiempos para representar en la pantalla un período de batido.
- Se encierran con los dos cursores el mayor número posible de períodos de oscilación de un péndulo dentro de un período de batido (el tiempo entre dos pasos por cero de la oscilación en la posición de reposo) y se lee la distancia temporal entre los dos cursores.

El resultado del cociente calculado con la distancia temporal y el número de períodos incluidos es el período de la oscilación

$$T = \frac{19,72 \text{ s}}{11} = 1,79 \text{ s.}$$

4. Comparación con la teoría

Con la longitud del péndulo $L = 0,995 \text{ m}$ (distancia entre la masa del péndulo y el punto de suspensión del péndulo), la distancia entre el punto de fijación del muelle de acoplamiento y el punto de suspensión del péndulo $d = 0,535 \text{ m}$, la masa del péndulo $m = 1 \text{ kg}$, la constante del muelle de acoplamiento $D = 3,9 \text{ N/m}$ y la aceleración gravitatoria $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ resulta de las ecuaciones (2) y (6):

$$k = 1,122 \text{ m/s}^2$$

$$T_+ = 2,00 \text{ s}$$

$$T_- = 1,81 \text{ s}$$

Los valores determinados experimentalmente $T_+ = 1,97 \text{ s}$ y $T_- = 1,79 \text{ s}$ deben compararse con estos valores. Sustituyendo estos últimos en las ecuaciones (11) y (12) se obtiene el resultado siguiente:

$$T = 1,88 \text{ s}$$

$$T_{\Delta} = 19,59 \text{ s}$$

Los valores determinados experimentalmente $T = 1,79 \text{ s}$ y $T_{\Delta} = 19,72 \text{ s}$ deben compararse con estos valores.

Los valores determinados experimentalmente concuerdan bien con la teoría, las desviaciones relativas están en el rango porcentual de un solo dígito y ascienden a un máximo del 5%.

5. Determinación de la constante del muelle de acoplamiento

Con un acoplamiento débil ($k \ll g$) la constante del muelle (2) tiene sólo una influencia muy débil sobre el período de la oscilación en contrafase, pero una fuerte influencia sobre el período de los batidos. Por lo tanto para determinar la constante del muelle se debe utilizar la relación con el período de batidos, la cual se obtiene cuando se introduce (5) en (10) y se despeja k .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (13)$$

Las frecuencias angulares se expresan por medio de los períodos de oscilación y se sustituye en (2).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (14)$$

El valor se desvía del valor nominal $3,9 \text{ N/m}$ en un 8% aproximadamente.