# Mécanique

Oscillations

PHYSICS EXPERIMENT

# Oscillations couplées

## ENREGISTREMENT ET EVALUATION DES OSCILLATIONS DE DEUX PENDULES IDENTIQUES COUPLES.

- Enregistrement de l'oscillation en phase et détermination de la période d'oscillation $T_+$.
- Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase et détermination de la période d'oscillation $T_-$.
- Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum et détermination de sa période d'oscillation $T$ ainsi que de la période de battement $T_\Delta$.
- Comparaison de la période de battement et de la période d'oscillation avec les valeurs calculées à partir des périodes d'oscillation propre $T_-$ et $T_+$.
- Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.

UE1050600

01/24 CW/UD

## NOTIONS DES BASE GÉNÉRALES

**Lorsque deux pendules couplés oscillent, de l'énergie est va et vient entre les deux pendules. Si les deux pendules sont identiques et que leurs oscillations sont excitées de telle manière que l'un des pendules se trouve au départ en position de repos alors que l'autre pendule est élongé au maximum, le transfert d'énergie est même intégral. C'est-à-dire qu'un pendule est entièrement au repos, tandis que l'autre oscille avec une amplitude maximale. La durée entre les deux arrêts d'un pendule ou, d'une manière générale, entre deux moments où le pendule oscille avec une amplitude minimale, est la période de battement $T_\Delta$.**

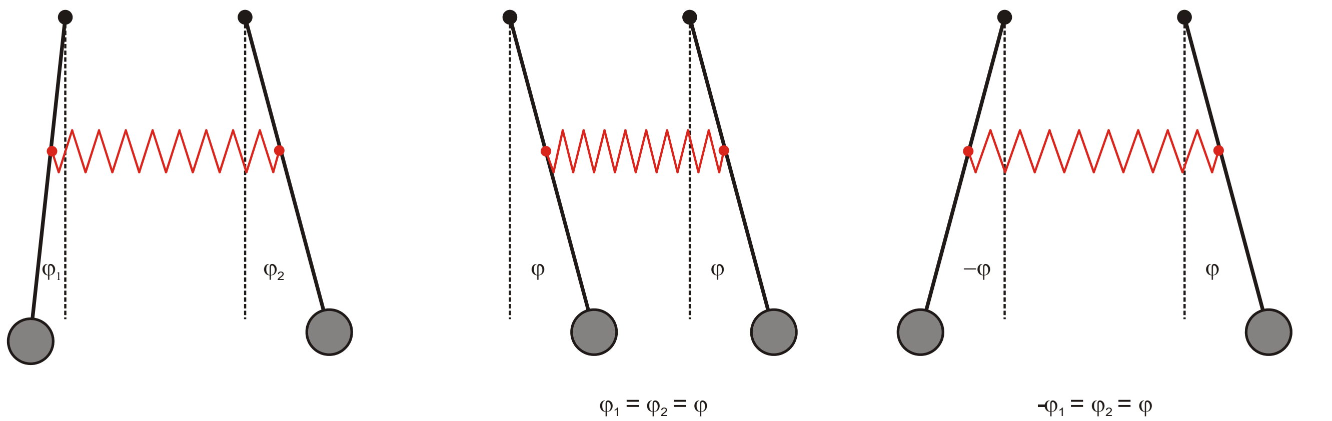
Les oscillations entre deux pendules mathématiques identiques couplés peuvent être décrites comme superposition de deux oscillations propres. On peut observer ces oscillations propres en excitant les deux pendules à des oscillations en phase ou en opposition de phase. Dans le premier cas, les pendules sans influence du couplage oscillent à la fréquence des pendules non couplés, dans le second cas, sous l'influence maximale du couplage, ils oscillent à la fréquence propre maximale. Toutes les autres oscillations peuvent être représentées comme des superpositions de ces deux oscillations propres.

On obtient pour le mouvement des pendules l'équation suivante (pour petits angles d'élongation $\varphi_1$ et $\varphi_2$) :

$$\begin{aligned} L\cdot\ddot{\varphi}_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2) &= 0 \\ L\cdot\ddot{\varphi}_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$g$ : accélération de la pesanteur, $L$ : longueur de pendule, $k$ : constante de couplage

Fig. 1: A gauche : oscillation couplée générale. Au milieu : oscillation couplée en phase. A droite : oscillation couplée en opposition de phase



Pour les grandeurs auxiliaires $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ et $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ (arbitraires dans un premier temps), on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Leurs solutions

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \tag{3}$$

avec les fréquences angulaires

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et } \omega_- = \sqrt{\frac{g + 2k}{L}} \tag{4}$$

correspondent aux oscillations propres décrites en cas d'excitation en phase ou en opposition de phase ($\varphi_+ = 0$ en phase et $\varphi_- = 0$ en opposition de phase).

Les déviations des pendules peuvent être calculées à partir de la somme ou la différence des deux grandeurs auxiliaires. On obtient la solution

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)\right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left(a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Dans un premier temps, les paramètres $a_+$, $a_-$, $b_+$ et $b_-$ sont des grandeurs quelconques qui peuvent être calculées depuis l'état d'oscillation des deux pendules au moment $t = 0$.

Le cas suivant qui consiste à tirer sur le pendule 1 avec un angle $\varphi_0$ au temps 0 et à partir de la position zéro et à le relâcher ensuite, pendant que le pendule 2 se trouve à l'état d'équilibre à la position zéro, est le plus facile à interpréter.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Après la conversion mathématique, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Cela correspond à une oscillation des deux pendules avec la même fréquence angulaire $\omega$, leurs amplitudes étant modulées avec la fréquence angulaire $\omega_\Delta$. On désigne une telle modulation sous le terme de battement. Dans le cas présenté ici, on peut même parler de battement maximum parce que la valeur minimum atteinte par 'amplitude est zéro.

## LISTE DES APPAREILS

2 Pendules avec capteur de mouvement @230 V 1000763 (U8404275-230)

ou

2 Pendules avec capteur de mouvement @115 V 1000762 (U8404275-115)

1 Ressort cylindrique 3,9 N/m 1002945 (U15027)

2 Etaux de fixation 1002832 (U1326)

2 Tiges statif, 1000 mm 1002936 (U15004)

1 Tige statif, 470 mm 1002934 (U15002)

4 Noix universelles 1002830 (U13255)

2 Adaptateurs BNC / douilles 4 mm 1002750 (U11259)

2 Capteurs de tension 10 V 1021682 (UCMA-BT02)

1 Enregistreur de données

1 Logiciel

De plus amples informations sur la mesure numérique sont disponibles sur le site web du produit dans la boutique en ligne 3B.

## MONTAGE

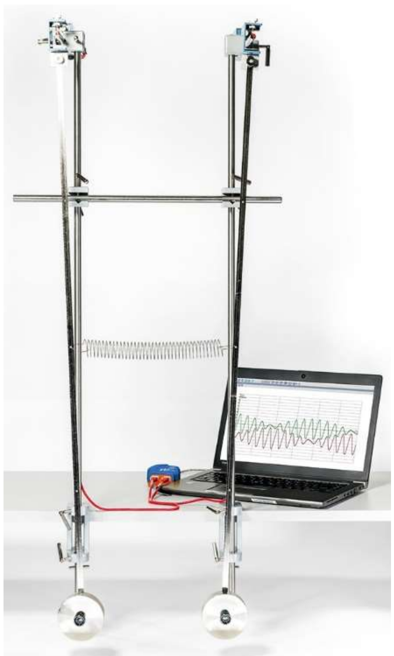


Fig. 2: Montage pour l'enregistrement et l'analyse des oscillations de deux pendules couplés identiques

Le montage est illustré sur la Fig. 2.

- Fixer les tiges statif d'une longueur de 1000 mm sur le plan de travail à un intervalle d'env.15 cm à l'aide de pinces-étaux.
- Fixer la tige statif courte à l'horizontale pour mieux stabiliser le montage.
- Fixer le capteur angulaire à l'extrémité supérieure des barres de support verticales à l'aide de manchons universels.

- Fixer les masses à l'extrémité inférieure des barres de pendule.
- Accrocher les barres de pendule sur les capteurs angulaires (des encoches sont prévues dans les tiges des capteurs d'angle pour les aiguilles du dispositif de suspension du pendule).
- Accrocher les ressorts à boudin dans les trous situés sur les barres de pendule, qui se trouvent à env. 40 cm de la suspension.
- Enficher les adaptateurs BNC / douilles 4 mm sur les capteurs angulaires et raccorder les capteurs de tension.
- Connecter les capteurs de tension à l'enregistreur de données.
- Raccorder les deux capteurs angulaires au réseau électrique à l'aide des blocs d'alimentation.

## REALISATION

- Lancer le logiciel et enregistrer les courbes temporelles des signaux de tension des deux capteurs.

**1. Enregistrement de l'oscillation équiphase**

- Tirer sur les deux pendules dans la même direction et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.

**2. Enregistrement de l'oscillation en opposition de phase**

- Tirer sur les deux pendules dans la direction opposée et avec le même angle (réduit) et les relâcher aussitôt.

**3. Enregistrement d'une oscillation couplée avec battement maximum**

- Le cas échéant, augmenter le nombre de valeurs mesurées.
- Tirer sur une barre de pendule et maintenir l'autre en position zéro, puis relâcher les deux en même temps.

## EXEMPLES DE MESURE

**1. Oscillation couplée équiphase**

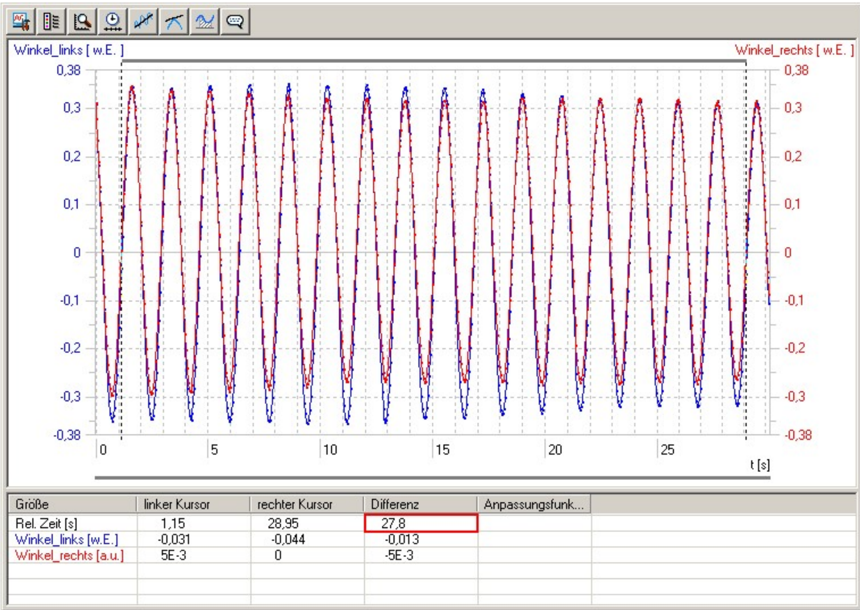



Fig. 3: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée équiphase (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## 2. Oscillation couplée en opposition de phase

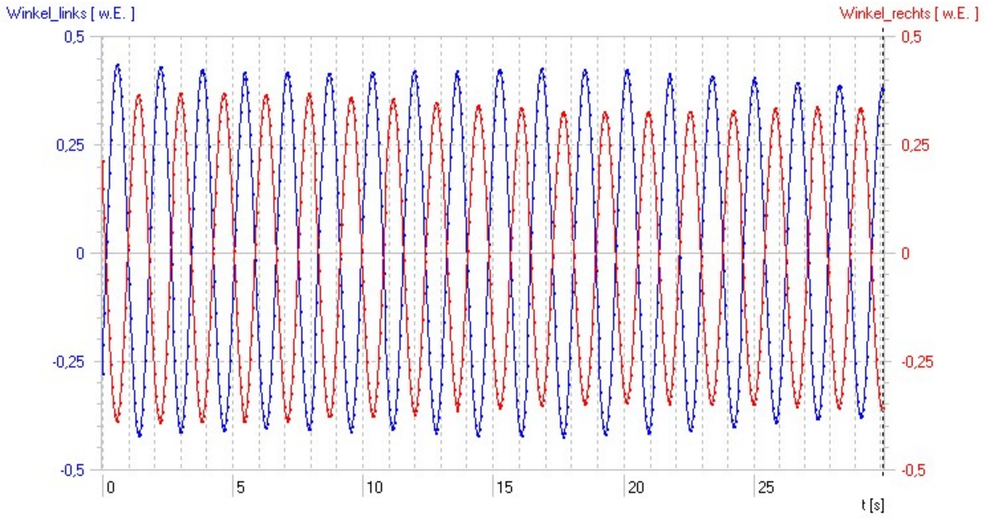



Fig. 4: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée en opposition de phase (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## 3. Oscillation couplée avec battement maximum

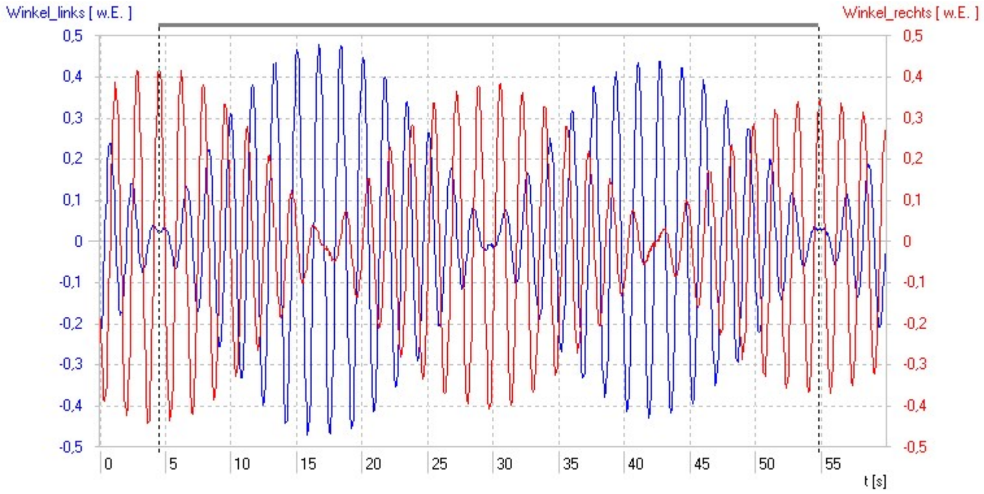



Fig. 5: Diagramme du temps d'élongation de l'oscillation couplée avec battement maximum (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

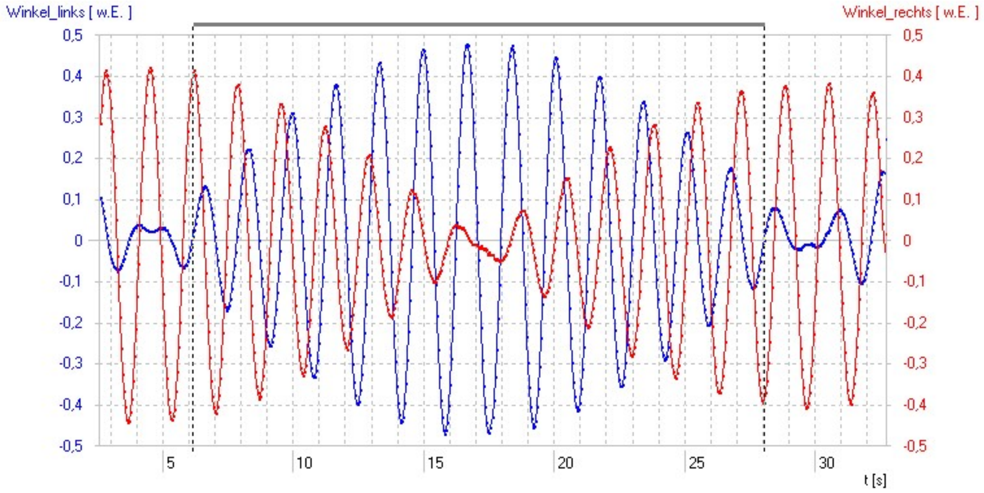



Fig. 6: Représentation agrandie d'une période de battement de l'oscillation couplée avec battement maximum (en bleu : pendule de gauche, en rouge : pendule de droite). La graduation angulaire n'est pas étalonnée

## EVALUATION

**1. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée équiphase**

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation équiphase.
- Entourer sur le diagramme le plus grand nombre de périodes d'oscillations d'un pendule au moyen de curseurs ; ce faisant, placer exactement chacun des deux curseurs sur le passage au point zéro d'un flanc montant pour permettre l'inclusion d'un nombre important de périodes (cf. Fig. 3).
- Lire l'intervalle de temps des curseurs (Fig. 3, encadré rouge).

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$$T_+ = \frac{27{,}8\ \text{s}}{16} = 1{,}737\ \text{s}$$

**2. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée en opposition de phase**

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation en opposition de phase et procéder de la même façon.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$T_- = 1{,}629$ s

**3. Détermination de la période d'oscillation de l'oscillation couplée avec battement maximum**

- Ouvrir le fichier concernant l'oscillation avec battement maximum.
- Entourer une ou, si possible, plusieurs périodes d'oscillation à l'aide des curseurs (cf. Fig. 5) et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période de battement incluses donne la période de battement

$T_\Delta = 25$ s

- Modifier la graduation de la base de temps de manière à agrandir la représentation d'une période de battement.
- A l'aide des curseurs, entourer sur le diagramme le plus grand nombre possible de périodes d'oscillation d'un pendule à l'intérieur d'une période de battement (temps s'écoulant entre deux immobilisations du pendule en position de repos) (cf. Fig. 6) et lire l'intervalle de temps des curseurs.

Le quotient obtenu à partir de l'intervalle de temps du curseur et du nombre de période incluses donne la période d'oscillation

$T = 1{,}685$ s

**4. Comparaison de la période de battement et de la période d'oscillation avec les valeurs calculées à partir des périodes d'oscillation propre**

Pour la période d'oscillation $T$ de l'oscillation couplée avec battement maximum, on obtient à partir de l'équation (8) :

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1{,}681\ \text{s} \qquad (9)$$

Cette valeur peut être comparée avec la valeur de mesure $T = 1{,}685$ s.

Le calcul de la période de battement $T_\Delta$ s'effectue de la même manière. Il faut toutefois tenir compte du fait que celle-ci est généralement définie comme le temps s'écoulant entre deux immobilisations d'un pendule en position de repos. Cela correspond à la moitié de la durée de période du terme cosinus de modulation ou du terme sinus de l'équation (7).

$$T_\Delta = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26\ \text{s} \qquad (10)$$

Cette valeur peut être comparée avec la valeur de mesure $T_\Delta = 25$ s.

L'écart d'environ une seconde par rapport à la valeur de mesure peut paraître de prime abord important. Il est cependant dû à la différence entre les périodes d'oscillation propre dont il dépend sensiblement. Une variation de quatre millisecondes qui se situe à peu près dans la plage de précision de mesure maximum atteignable dans le cadre de cette expérience pour les périodes d'oscillation propre, suffit déjà à provoquer une modification de la période de battement d'une seconde.

**5. Détermination des constantes de rappel des ressorts de couplage.**

La constante de rappel du ressort de couplage $D$ est fonction de la constante de couplage $k$ suivant l'équation

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \qquad (11)$$

($d$ : Intervalle entre le point de fixation du ressort de couplage et la suspension du pendule).

Pour un couplage faible ($k << g$), la constante de rappel n'a que peu d'influence sur la période d'oscillation de l'oscillation en opposition de phase mais, par contre, une grande influence sur la période de battement. Pour calculer la constante de rappel, il est donc recommandé d'établir une relation avec la période de battement, relation que l'on obtient en intégrant l'équation (4) dans l'équation (8) pour obtenir l'inconnue k dans l'équation ci-dessous.

$$k = 2 \cdot L \cdot \left(\omega_\Delta^2 - \omega_\Delta \cdot \omega_+\right) \qquad (12)$$

On exprime à présent les pulsations par les périodes d'oscillation et on les intègre dans l'équation (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_\Delta} + \frac{T_+{}^2}{T_\Delta{}^2}\right) = 3{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \qquad (13)$$