

## Harmonische Schwingungen

### MESSUNG DER SCHWINGUNGEN EINES SCHRAUBENFEDERPENDELS MIT EINEM ULTRASCHALL-BEWEGUNGSSENSOR

- Statische Bestimmung der Federkonstanten  $k$  für verschiedene Schraubenfedern.
- Aufzeichnung der harmonischen Schwingung eines Schraubenfederpendels in Abhängigkeit von der Zeit mit einem Ultraschall-Bewegungssensor.
- Bestimmung der Schwingungsdauer  $T$  für verschiedene Kombinationen aus Federkonstante  $k$  und Masse  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1: Messanordnung

### ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Schwingungen entstehen, wenn ein aus der Gleichgewichtslage ausgelenktes System durch eine Kraft in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird. Man spricht von harmonischen Schwingungen, wenn die das System in die Ruhelage zurücktreibende Kraft zu jedem Zeitpunkt proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist. Die Schwingungen eines Schraubenfederpendels sind hierfür ein klassisches Beispiel. Die Proportionalität zwischen

Auslenkung und zurücktreibender Kraft wird durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben.

Zwischen der Auslenkung  $x$  und der zurücktreibenden Kraft  $F$  gilt also der Zusammenhang

$$(1) \quad F = -k \cdot x \quad \text{mit}$$

$k$ : Federkonstante

Für eine an der Schraubenfeder hängenden Masse  $m$  gilt daher die Bewegungsgleichung

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0,$$

solange die Masse der Feder selber sowie eine eventuell dämpfende Reibungskraft vernachlässigt werden können.

Die Lösungen dieser Bewegungsgleichung haben die allgemeine Form

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right),$$

wie im Experiment durch Aufzeichnung der harmonischen Schwingungen eines Schraubenfederpendels als Funktion der Zeit mit dem Ultraschall-Bewegungssensor und Anpassung einer Sinusfunktion an die Messdaten bestätigt wird.

Der Ultraschall-Bewegungssensor erfasst den Abstand der am Pendel hängenden Masse zum Sensor. Die Messgröße entspricht also bis auf eine durch eine Tara-Funktion kompensierbare Nullpunktverschiebung unmittelbar der in Gleichung 3 betrachteten Größe  $x(t)$ .

Man definiert die Schwingungsdauer  $T$  als den Abstand zweier Nulldurchgänge der Sinusfunktion in die gleiche Richtung und erhält aus (3)

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Zur Bestätigung von (4) werden die Messungen für verschiedene Kombinationen aus Masse  $m$  und Federkonstante  $k$  durchgeführt und jeweils die Schwingungsdauer aus dem Abstand der Nulldurchgänge in den aufgezeichneten Daten bestimmt oder einer Anpassung von Gleichung (3). Die Federkonstanten werden zusätzlich durch statische Messungen bestimmt und mit den Federkonstanten aus den dynamischen Messungen verglichen.

## GERÄTELISTE

1	Schraubenfedern zum Hooke'schen Gesetz	U40816	1003376
1	Schlitzgewichtsatz, 10 x 10 g	U30031	1003227
1	Schlitzgewichtsatz, 5 x 50 g	U30033	1003229
1	Stativfuß, 3-Bein, 150 mm	U13270	1002835
1	Stativstange, 1000 mm	U15004	1002936
1	Muffe mit Haken	U13252	1002828
1	Taschenbandmaß, 2 m	U10073	1002603
1	Bewegungssensor €Motion	UCMA-0101021673	
1	Computer		
1	Software		

Weitere Informationen zum digitalen Messen sind auf der Webseite des Experiments im 3B Webshop zu finden.

## AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

### Hinweis:

Das Experiment wird beispielhaft für die Federpendel durchgeführt, deren Schraubenfedern nominell mit  $k = 2,5, 5$  und  $25 \text{ N/m}$  spezifiziert sind.

### Statische Messung

- Messanordnung gemäß Fig. 1 aufbauen.
- Eine der Schraubenfedern zum Hooke'schen Gesetz (nominell  $k = 2,5, 5, 10, 15$  und  $25 \text{ N/m}$ ) an die Muffe mit Haken hängen.
- Je nach Stärke der Schraubenfeder nacheinander die Gewichte des Schlitzgewichtsatzes  $10 \times 10 \text{ g}$  oder  $5 \times 50 \text{ g}$  in die Schraubenfeder einhängen und mit Hilfe des Taschenbandmaßes jeweils die Auslenkung  $s$  in Tab. 1 eintragen.

### Hinweis:

Die Halter der Schlitzgewichtsätze zählen zu den zehn  $10 \text{ g}$  – bzw. fünf  $50 \text{ g}$  – Massestücken dazu.

- Die Messreihe für die anderen Schraubenfedern wiederholen.

### Dynamische Messung

- Messanordnung gemäß Fig. 1 aufbauen.
- Eine der Schraubenfedern zum Hooke'schen Gesetz (nominell  $k = 2,5, 5, 10, 15$  und  $25 \text{ N/m}$ ) an die Muffe mit Haken hängen.
- Die vier  $50 \text{ g}$  – Massen des Schlitzgewichtsatzes  $5 \times 50 \text{ g}$  vom Halter nehmen. Den Halter in die Schraubenfeder einhängen.
- Den Ultraschall-Bewegungssensor genau unter der Schraubenfeder mit dem eingehängten Halter platzieren.
- Den Ultraschall-Bewegungssensor mit Hilfe des USB-Kabels an den Computer anschließen und die Software starten.
- Das Federpendel leicht auslenken, loslassen und gleichzeitig in der Software die Messung starten.
- Nacheinander die vier  $50 \text{ g}$  – Massen in den Halter einhängen und jeweils die Messung wiederholen.
- Die Messreihe für die anderen Schraubenfedern wiederholen.

## MESSBEISPIEL

### Statische Messung

Tab. 1: Auslenkungen  $s$  der nominell mit  $k = 2,5 \text{ N/m}$  spezifizierten Schraubenfeder bei verschiedenen angehängten Massen  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3,2
20	7,2
30	11,2
40	15,4
50	19,7
60	23,7
70	27,7
80	31,7
90	36,0
100	40,0

Tab. 2: Auslenkungen  $s$  der nominell mit  $k = 5 \text{ N/m}$  spezifizierten Schraubenfeder bei verschiedenen angehängten Massen  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0,9
20	3,0
30	4,7
40	6,2
50	7,9
60	9,4
70	10,9
80	12,5
90	14,0
100	15,7

Tab. 3: Auslenkungen  $s$  der nominell mit  $k = 25 \text{ N/m}$  spezifizierten Schraubenfeder bei verschiedenen angehängten Massen  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1,4
100	3,2
150	5,0
200	6,9
250	8,7

### Dynamische Messung

Fig. 2 zeigt die von der Software aufgezeichneten Schwingungsdaten beispielhaft für ein Federpendel mit nominell  $k = 5 \text{ N/m}$  und  $m = 250 \text{ g}$ . An den durch die Kursoren markierten Bereich der Messkurve wurde zur Bestätigung von (3) eine Sinusfunktion angepasst.

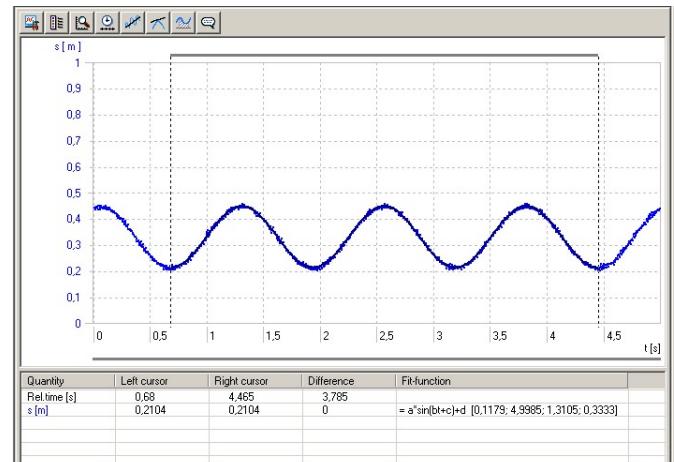


Fig. 2: Aufgezeichnete Schwingungsdaten nach Anpassung einer Sinusfunktion. Die Kursoren markieren den Bereich der Anpassung

## AUSWERTUNG

### Statische Messung

Die Gewichtskraft  $F_G$  ist gleich der Federkraft  $F_F$ , d.h. nach dem Newtonschen und dem Hooke'schen Gesetz gilt:

$$(5) \quad F_G = m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m$$

$$B = \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B}$$

$F_G$ : Gewichtskraft

$m$ : angehängte Masse

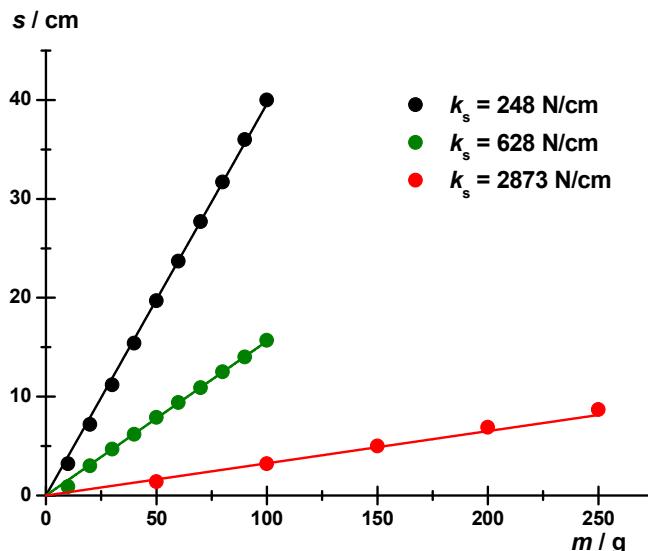
$g$ : Erdbeschleunigung

$F_F$ : Federkraft

$k_s$ : Federkonstante

$s$ : Auslenkung der Feder

- Die Messwerte aus Tab. 1, 2 und 3 graphisch darstellen (Fig. 3), jeweils eine Gerade  $s = B_s \cdot m$  an die Messpunkte anpassen und mit Hilfe von Gleichung (5) aus der Gera densteigung  $B_s$  die Federkonstante  $k_s$  bestimmen.

Fig. 3: Auslenkung  $s$  als Funktion von  $m$ **Dynamische Messung**

- Aus den aufgezeichneten Schwingungsdaten jeweils die Periodendauer  $T$  ermitteln.
- Dazu jeweils die Zeit zwischen zwei übernächsten Nulldurchgängen direkt aus der Messkurve ablesen und in die Tabellen 4, 5 und 6 eintragen. Die Periodendauer kann alternativ auch mit Hilfe von Gleichung (4) aus der Anpassung von Gleichung (3) an die Messkurve bestimmt werden.

Tab. 4: Aus den aufgezeichneten Schwingungsdaten bestimmte Periodendauern des Federpendels, dessen Schraubenfeder mit nominell  $k = 2,5$  N/m spezifiziert ist

$m$ / g	$T$ / s	$T^2$ / $s^2$
50	0,937	0,877
100	1,308	1,710
150	1,503	2,258

Tab. 5: Aus den aufgezeichneten Schwingungsdaten bestimmte Periodendauern des Federpendels, dessen Schraubenfeder mit nominell  $k = 5$  N/m spezifiziert ist

$m$ / g	$T$ / s	$T^2$ / $s^2$
50	0,584	0,341
100	0,810	0,656
150	0,992	0,983
200	1,143	1,305
250	1,262	1,592

Tab. 6: Aus den aufgezeichneten Schwingungsdaten bestimmte Periodendauern des Federpendels, dessen Schraubenfeder mit nominell  $k = 25$  N/m spezifiziert ist

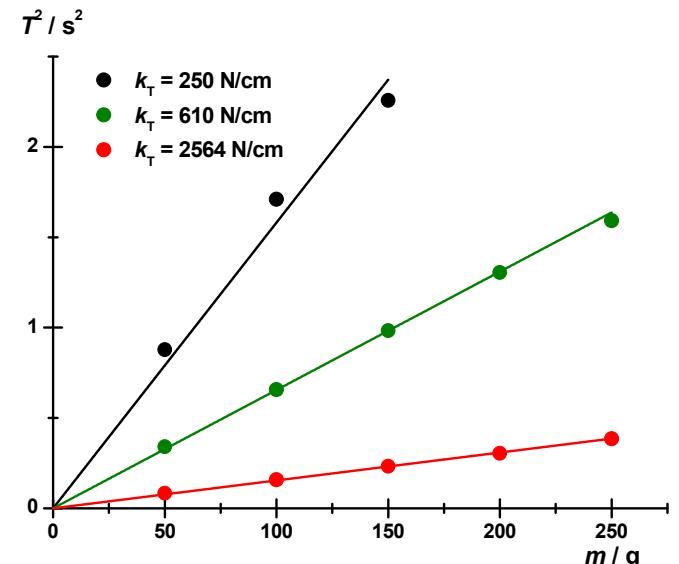
$m$ / g	$T$ / s	$T^2$ / $s^2$
50	0,289	0,084
100	0,398	0,158
150	0,482	0,232
200	0,553	0,305
250	0,619	0,384

Aus Gleichung (4) folgt:

$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m$$

$$B_T = \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T}$$

- Die Messwerte aus Tab. 4, 5 und 6 graphisch darstellen (Fig. 4), jeweils eine Gerade  $T^2 = B_T \cdot m$  an die Messpunkte anpassen und mit Hilfe von Gleichung (5) aus der Gera- densteigung  $B_T$  die Federkonstante  $k_T$  bestimmen.

Fig. 4: Quadrat der Periodendauer  $T^2$  als Funktion von  $m$ 

- Federkonstanten  $k_T$  aus den dynamischen Messungen gegen die Federkonstanten  $k_s$  aus den statischen Messun- gen auftragen und eine Gerade an die Messpunkte anpas- sen (Fig. 5).

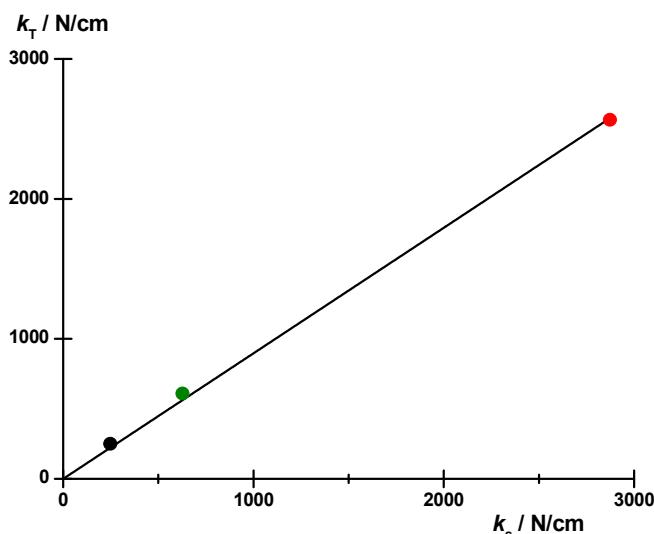


Fig. 5:  $k_T$  als Funktion von  $k_s$  mit angepasster Gerade

Die Geradenanpassung an die Messpunkte in Fig. 5 ergibt eine Steigung von 0,9, d.h. die Messpunkte liegen in guter Näherung auf der Winkelhalbierenden. Die Übereinstimmung der aus den dynamischen und statischen Messungen bestimmten Federkonstanten wird bestätigt.

## Simple Harmonic Oscillations

### MEASURE THE OSCILLATIONS OF A COIL SPRING PENDULUM USING AN ULTRASONIC MOTION SENSOR

- Carry out static determination of spring constants  $k$  for various coil springs.
- Record the harmonic oscillation of a coil spring pendulum as a function of time using an ultrasonic motion sensor.
- Determine the period of oscillation  $T$  for various combinations of spring constant  $k$  and mass  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1: Experiment set-up

### GENERAL PRINCIPLES

Oscillations occur when a system disturbed from its equilibrium position is affected by a force which acts to restore it to equilibrium. This is known as simple harmonic oscillation if the restoring force is proportional to the deviation from the equilibrium position at all times. The oscillations of a coil spring pendulum are one classic example of this. The proportionality between the deviation and the restoring force is described by Hooke's law.

The law states that the relationship between the deviation  $x$  and the restoring force  $F$  is given by

$$(1) \quad F = -k \cdot x$$

where  $k$  = spring constant

For a weight of mass  $m$  suspended from the spring, the following therefore holds:

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0.$$

This applies as long the mass of the spring itself and any friction that might arise can be neglected.

In general, solutions to this equation of motion take the following form:

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right).$$

This will be verified by experiment by recording the harmonic oscillations of a coil spring pendulum as a function of time with the help of an ultrasonic motion sensor and matching the measured data to a sine function.

The ultrasonic motion sensor detects the distance between itself and the weight suspended from the spring. Other than an offset for the zero point, which can be compensated for by calibration, the measurement corresponds directly to the variable  $x(t)$  included in equation 3.

The period of oscillation  $T$  is defined as the interval between two points where a sine wave crosses the zero axis in the same direction. From equation (3) it can therefore be seen to be equal to:

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

In order to verify equation (4), the measurements are made for various combinations of mass  $m$  and spring constant  $k$ , whereby the period of oscillation is determined from where a curve matching the data crosses the zero axis or by matching the curve to equation (3). The spring constants are also to be established by static measurements and compared with those obtained from dynamic measurements.

## LIST OF EQUIPMENT

1	Set of Helical Springs for Hooke's Law	U40816	1003376
1	Set of Slotted Weights, 10 x 10 g	U30031	1003227
1	Set of Slotted Weights, 5 x 50 g	U30033	1003229
1	Tripod Stand 150 mm	U13270	1002835
1	Stainless Steel Rod 1000 mm	U15004	1002936
1	Clamp with Hook	U13252	1002828
1	Pocket Measuring Tape, 2 m	U10073	1002603
1	Motion Detector €Motion	UCMA-0101021673	
1	Computer		
1	Software		

More information about digital measurement can be found on the experiment's webpage in the 3B Webshop.

## EXPERIMENT SET-UP AND PROCEDURE

### Note:

The experiment is carried out using spring pendulums involving coil springs with with spring constants specified as  $k = 2.5, 5$  and  $25 \text{ N/m}$  by way of example.

### Static measurement

- Set up the apparatus for the measurement as shown in Fig. 1.
- Suspend one of the Hooke's law springs (nominal values of  $k = 2.5, 5, 10, 15$  and  $25 \text{ N/m}$ ) from the clamp with hook.
- Depending on the stiffness of the spring, add the weights from the  $10 \times 10 \text{ g}$  or  $5 \times 50 \text{ g}$  sets of slotted weights to the spring one after the other, then use the pocket tape measure to find the extension  $s$  and enter it into Table 1.

### Note:

The weight holders in the slotted weight sets count as one of the ten  $10 \text{ g}$  or the five  $50 \text{ g}$  weights.

- Repeat the set of measurements for each of the other springs.

### Dynamic measurement

- Set up the apparatus for the measurement as shown in Fig. 1.
- Suspend one of the Hooke's law springs (nominal values of  $k = 2.5, 5, 10, 15$  and  $25 \text{ N/m}$ ) from the clamp with hook.
- Take the four  $50 \text{ g}$  weights in the  $5 \times 50 \text{ g}$  slotted weight set off the holder. Suspend the holder from the coil spring.
- Place the ultrasonic motion sensor precisely underneath the spring with weight holder hanging from it.
- Connect the ultrasonic motion sensor to the computer using the USB cable and start the software.
- Slightly deflect the spring pendulum, let it go and simultaneously start the measurement in the software.
- Add  $50 \text{ g}$  weights to the holder one by one and repeat the measurement in each case.
- Repeat the whole set of measurements for the other springs.

## SAMPLE MEASUREMENT

### Static measurement

Tab. 1: Deflection  $s$  for coil spring with specified spring constant  $k = 2.5 \text{ N/m}$  with various masses  $m$  suspended from it

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3.2
20	7.2
30	11.2
40	15.4
50	19.7
60	23.7
70	27.7
80	31.7
90	36.0
100	40.0

Tab. 2: Deflection  $s$  for coil spring with specified spring constant  $k = 5 \text{ N/m}$  with various masses  $m$  suspended from it

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0.9
20	3.0
30	4.7
40	6.2
50	7.9
60	9.4
70	10.9
80	12.5
90	14.0
100	15.7

Tab. 3: Deflection  $s$  for coil spring with specified spring constant  $k = 25 \text{ N/m}$  with various masses  $m$  suspended from it

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1.4
100	3.2
150	5.0
200	6.9
250	8.7

### Dynamic measurement

Fig. 2 shows the oscillation data recorded by the software using the spring with nominal spring constant  $k = 5 \text{ N/m}$  carrying a mass  $m = 250 \text{ g}$  as an example. In order to verify equation (3), the region of the measured curve between the two cursors is fitted to a sine function.

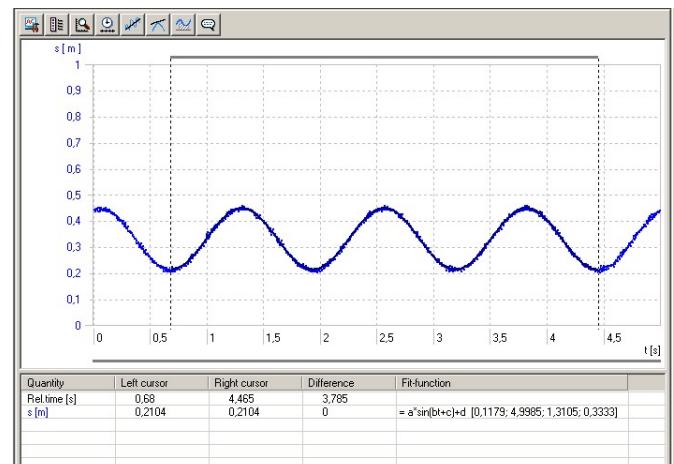


Fig. 2: Recorded oscillation after fitting to a sine function. The cursors mark the two ends of the region to be fitted

## EVALUATION

### Static measurement

The weight  $F_G$  is equal to the force of the spring  $F_F$ , i.e. according to the laws of Newton and Hooke, the following is true:

$$F_G = m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m \quad (5)$$

$$B = \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B}$$

$F_G$ : Weight

$m$ : Mass of suspended weights

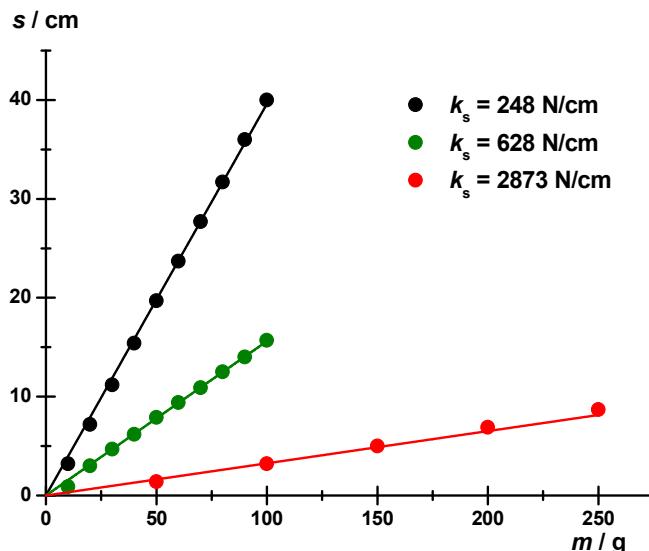
$g$ : Acceleration due to gravity

$F_F$ : Force of spring

$k_s$ : Spring constant

$s$ : Deflection of spring

- Plot the measurement values from tables 1, 2 and 3 n (Fig. 3), and draw a straight line  $s = B_s \cdot m$  through the points. Use equation (5) to determine the spring constant  $k_s$  from the gradient  $B_s$ .

Fig. 3: Deflection  $s$  as a function of  $m$ **Dynamic measurement**

- Determine the period of oscillation  $T$  for each set of oscillation data.
- Do this by reading off the time between every second crossing of the zero axis direct from the curve and entering the results into tables 4, 5 and 6. Alternatively, the period can be determined with the help of equation (4) from the curve as fitted to equation (3).

Tab. 4: Period of oscillation for coil spring with specified nominal spring constant  $k = 2.5 \text{ N/m}$  as obtained from recorded oscillation data

$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0.937	0.877
100	1.308	1.710
150	1.503	2.258

Tab. 5: Period of oscillation for coil spring with specified nominal spring constant  $k = 5 \text{ N/m}$  as obtained from recorded oscillation data

$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0.584	0.341
100	0.810	0.656
150	0.992	0.983
200	1.143	1.305
250	1.262	1.592

Tab. 6: Period of oscillation for coil spring with specified nominal spring constant  $k = 25 \text{ N/m}$  as obtained from recorded oscillation data

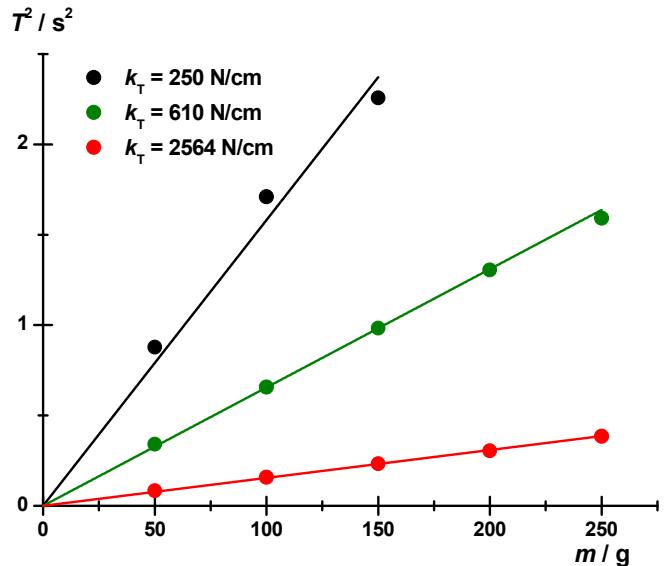
$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0.289	0.084
100	0.398	0.158
150	0.482	0.232
200	0.553	0.305
250	0.619	0.384

From equation (4):

$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m$$

$$B_T = \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T}$$

- Plot the square of the period measurements from tables 4, 5 and 6 (Fig. 4) against the mass and draw a straight line  $T^2 = B_T \cdot m$  through the points. Use equation (5) to determine the spring constant  $k_T$  from the gradient  $B_T$ .

Fig. 4: Square of period of oscillation  $T^2$  as a function of  $m$ 

- Plot the spring constants  $k_T$  from the dynamic measurements against those obtained from the static measurements  $k_s$  and draw a straight line through the points (Fig. 5).

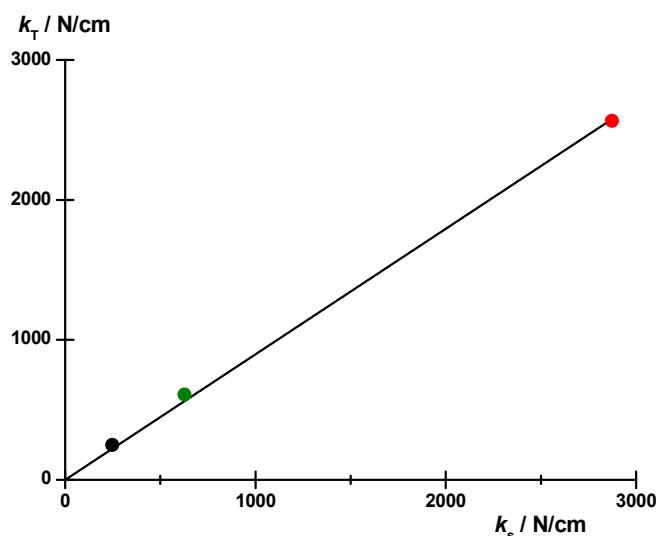


Fig. 5:  $k_T$  as a function of  $k_s$  with straight line fitted

Fitting a straight line to the measurements in Fig. 5 results in a line of gradient 0.9, i.e. the values lie along a line bisecting the angle to a good approximation. The constants obtained from both static and dynamic measurements are confirmed to be in agreement.

## Oscilaciones armónicas

### MEDICIÓN DE LAS OSCILACIONES DE UN PÉNDULO DE MUELLE HELICOIDAL CON UN SENSOR DE MOVIMIENTO POR ULTRASONIDO

- Determinación estática de las constantes de muelle  $k$  para diferentes muelles helicoidales.
- Registro de la oscilación armónica de un péndulo de muelle helicoidal en dependencia con el tiempo, con un sensor de movimiento por ultrasonido.
- Determinación del período  $T$  para diferentes combinaciones de constante de muelle  $k$  y masa  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1: Montaje experimental

### FUNDAMENTOS GENERALES

Las oscilaciones se originan cuando un sistema desviado de su condición de equilibrio es returnedo a su posición de equilibrio original por medio de una fuerza de restitución. Se habla de oscilaciones armónicas cuando la fuerza restituyente a la posición de reposo es proporcional a la desviación de la posición de reposo. Las oscilaciones de un péndulo de muelle helicoidal son por ello un ejemplo

clásico. La proporcionalidad entre la desviación y la fuerza de restitución se describe por medio de la ley de Hook.

Entre la desviación  $x$  y la fuerza de restitución  $F$  se establece la relación

$$(1) \quad F = -k \cdot x \quad \text{con} \\ k: \text{Constante del muelle.}$$

Por lo tanto, para una masa  $m$  que cuelga de un muelle helicoidal se tiene la ecuación de movimiento

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 ,$$

siempre y cuando la masa propia del muelle y una posible amortiguación por una fuerza de fricción se puedan despreciar.

Las soluciones de esta ecuación de movimiento tienen en general la forma

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) ,$$

como se comprueba en el experimento, registrando las oscilaciones armónicas de un péndulo de muelle helicoidal en función del tiempo por medio de un sensor de movimiento por ultrasonido y luego adaptando una función senoidal a los datos de medida.

El sensor de movimiento por ultrasonido capta la distancia de la masa colgante del péndulo hasta el sensor. Es decir, la magnitud de medida corresponde directamente a la variable  $x(t)$  descrita en la ecuación (3) considerando un posible desplazamiento del punto cero compensable por medio de una función de tara.

Se define como el período  $T$  el tiempo transcurrido entre dos pasos por cero de la función seno en la misma dirección y se obtiene de (3) la expresión

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Para la comprobación de (4) se realizan las mediciones para diferentes combinaciones de masa  $m$  - constante de muelle  $k$  y se determina cada vez el período de la oscilación como la distancia entre dos pasos por cero en los datos registrados o por una adaptación de la ecuación (3). Las constantes de muelle se determinan además por medio de mediciones estáticas y se comparan con las constantes de muelle determinadas por medio de mediciones dinámicas.

## LISTA DE EQUIPOS

1 Juego de resortes para demostración de la ley de Hooke	U40816	1003376
1 Juego de pesas de ranura, 10x 10 g	U30031	1003227
1 Juego de pesas de ranura, 5x 50 g	U30033	1003229
1 Pie soporte, 3 patas, 150 mm	U13270	1002835
1 Varilla de soporte, 1000 mm	U15004	1002936
1 Nuez con gancho	U13252	1002828
1 Cinta métrica de bolsillo, 2 m	U10073	1002603
1 Detector de movimiento EMotion	UCMA-0101021673	
1 Computador		
1 Software		

Encontrará más información sobre la medición digital en el sitio web del experimento, en la tienda virtual de 3B.

## MONTAJE Y EJECUCIÓN

### Observación:

El experimento se realiza ejemplarmente para los péndulos de muelle cuyos muelles helicoidales se especifican nominalmente con  $k = 2,5, 5$  y  $25 \text{ N/m}$ .

### Medición estática

- Se monta la disposición de medición según la Fig. 1.
- Se cuelga en la nuez con cancho uno de los muelles helicoidales para la ley de Hook (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  y  $25 \text{ N/m}$ ).
- Dependiendo de la fortaleza del muelle helicoidal se cuelgan en el muelle helicoidal las pesas del juego de pesas de ranura  $10 \times 10 \text{ g}$  o de  $5 \times 50 \text{ g}$ , por medio de la cinta métrica de bolsillo se mide cada vez la elongación s resultante y se anota en la Tab. 1.

### Observación:

El platillo soporte del juego de pesas de ranura se tiene en cuenta con las diez pesas de  $10 \text{ g}$  resp. con las cinco pesas de  $50 \text{ g}$ .

- La serie de mediciones se repite para los otros muelles helicoidales.

### Medición dinámica

- Se monta la disposición de medición de acuerdo con la Fig. 1.
- Se cuelga en la nuez con cancho uno de los muelles helicoidales para la ley de Hook (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  y  $25 \text{ N/m}$ ).
- Las cuatro masas de  $50 \text{ g}$  del juego de masas de ranura de  $5 \times 50 \text{ g}$  se retiran del soporte. El soporte se cuelga en el muelle helicoidal.
- El sensor de movimiento por ultrasonido se coloca directamente por debajo del muelle helicoidal con el soporte colgado.
- Se conecta el sensor de movimiento al computador utilizando el cable USB y se inicia el software.
- Se desvía el péndulo helicoidal un poco de la vertical, se deja libre y se inicia la medición en el software al mismo tiempo.
- Secuencialmente se cuelgan las cuatro masas de  $50 \text{ g}$  en el soporte y cada vez se repite la medición.
- La serie de mediciones se repite para los otros muelles helicoidales.

## EJEMPLO DE MEDICIÓN

### Medición estática

Tab. 1: Desviaciones  $s$  del muelle helicoidal especificado nominalmente con  $k = 2,5 \text{ N/m}$  con diferentes masas  $m$  colgadas

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3,2
20	7,2
30	11,2
40	15,4
50	19,7
60	23,7
70	27,7
80	31,7
90	36,0
100	40,0

Tab. 2: Desviaciones  $s$  del muelle helicoidal especificado nominalmente con  $k = 5 \text{ N/m}$  con diferentes masas  $m$  colgadas

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0,9
20	3,0
30	4,7
40	6,2
50	7,9
60	9,4
70	10,9
80	12,5
90	14,0
100	15,7

Tab. 3: Desviaciones  $s$  del muelle helicoidal especificado nominalmente con  $k = 25 \text{ N/m}$  con diferentes masas  $m$  colgadas

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1,4
100	3,2
150	5,0
200	6,9
250	8,7

### Medición dinámica

La Fig. 2 muestra los datos de oscilación registrados por el software ejemplarmente para un péndulo de muelle nominalmente con  $k = 5 \text{ N/m}$  y  $m = 250 \text{ g}$ . En el sector marcado por los cursorres de la curva de medida se ha adaptado una función seno para la comprobación de (3).

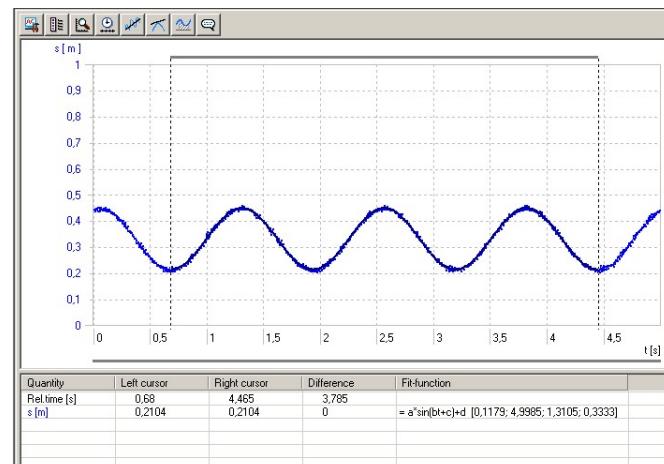


Fig. 2: Datos de oscilación registrados después de la adaptación de una función seno. Los cursorres muestran el sector de adaptación

## EVALUACIÓN

### Medición estática

La fuerza generada por el peso  $F_G$  es igual a la fuerza del muelle  $F_F$ , es decir, que según la ley de Newton y la ley de Hook se obtiene que:

$$(5) \quad F_G = m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m$$

$$B = \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B}$$

$F_G$ : Fuerza por el peso  
 $m$ : masa colgante  
 $g$ : Aceleración gravitacional  
 $F_F$ : Fuerza ejercida por el muelle  
 $k_s$ : Constante de muelle  
 $s$ : Desviación del muelle

- Los valores de medida de las Tab. 1, 2 y 3 se representan gráficamente (Fig. 3) en cada uno de ellos se adapta cada vez una recta  $s = B_s m$  entre los puntos de medida y aplicando la ecuación (5), de la pendiente  $B_s$  de la curva correspondiente se determina la constante del muelle  $k_s$ .

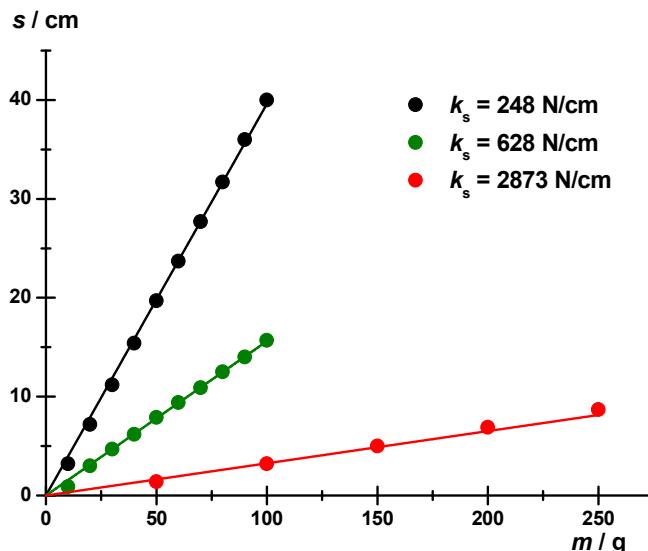


Fig. 3: Desviación s como función de m

**Medición dinámica**

- De los datos de oscilación registrados se determina cada vez la duración del período  $T$ .
- Para ello se mide el intervalo de tiempo entre dos pasos por cero subsiguientes, se leen directamente de la curva de medida y se anotan en las tablas 4, 5 y 6. Alternativamente, la duración del período se puede determinar por medio de la ecuación (4) de la adaptación de la ecuación (3) a la curva de medida.

Tab. 4: De los datos de oscilación registrados las duraciones del período determinadas del péndulo helicoidal, cuyo muelle helcoidal está especificado nominalmente por  $k = 2,5 \text{ N/m}$ 

$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,937	0,877
100	1,308	1,710
150	1,503	2,258

Tab. 5: De los datos de oscilación registrados las duraciones del período determinadas del péndulo helicoidal, cuyo muelle helcoidal está especificado nominalmente por  $k = 5 \text{ N/m}$ 

$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,584	0,341
100	0,810	0,656
150	0,992	0,983
200	1,143	1,305
250	1,262	1,592

Tab. 6: De los datos de oscilación registrados las duraciones del período determinadas del péndulo helicoidal, cuyo muelle helcoidal está especificado nominalmente por  $k = 25 \text{ N/m}$ 

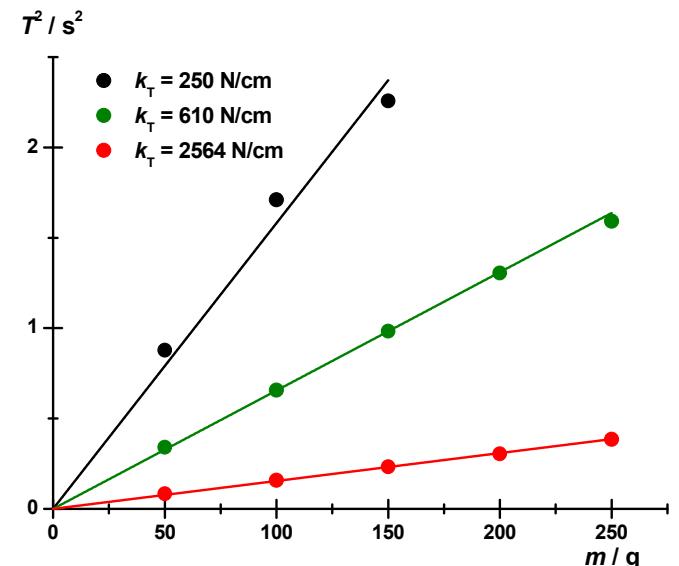
$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,289	0,084
100	0,398	0,158
150	0,482	0,232
200	0,553	0,305
250	0,619	0,384

De la ecuación (4) sigue:

$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m$$

$$B_T = \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T}$$

- Los valores de medida de las Tabs. 4, 5 y 6 se representan gráficamente (Fig. 4), cada vez se adapta una recta  $T^2 = B_T \cdot m$  en los puntos de medida y usando la ecuación (5) de la pendiente  $B_T$  se determina la constante del muelle  $k_T$ .

Fig. 4: Cuadrado de la duración del período  $T^2$  como función de m

- Las constantes de muelle  $k_T$  a partir de las mediciones dinámicas se grafican contra las constantes de muelle  $k_s$  a partir de las mediciones estáticas y se adapta una recta en los puntos de medida (Fig. 5)

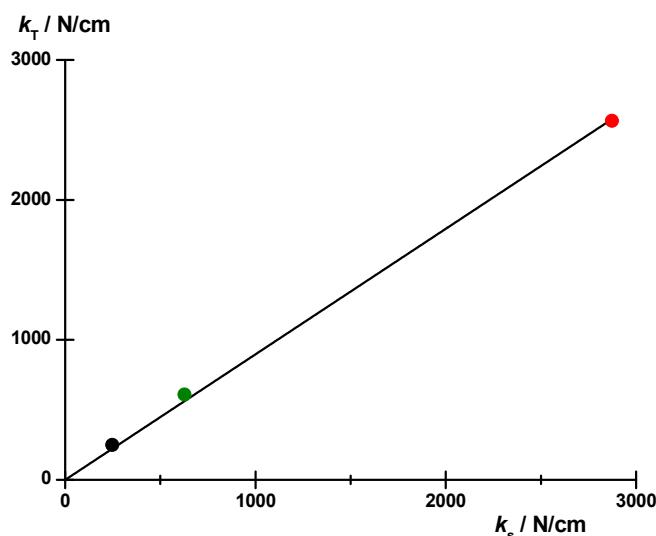


Fig. 5:  $k_T$  como función de  $k_s$  con recta adaptada

La adaptación de la recta a los puntos de medida en la Fig. 5 da por resultado una pendiente de 0,9, es decir, que los puntos de medida se encuentran en la bisectriz del ángulo. Se comprueba así la concordancia de las constantes de muelle determinadas por el método dinámico y el método estático.

## Oscillations harmoniques

### MESURE DES OSCILLATIONS D'UN PENDULE ÉLASTIQUE VERTICAL AU MOYEN D'UN CAPTEUR DE MOUVEMENT À ULTRASONS

- Détermination statique des constantes de ressort  $k$  pour différents ressorts hélicoïdaux.
- Enregistrement de l'oscillation harmonique d'un pendule élastique vertical en fonction du temps au moyen d'un capteur de mouvement à ultrasons.
- Mesure de la période d'oscillation  $T$  pour différentes combinaisons de constantes de raideur  $k$  du ressort et de masses  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1 : Ensemble de mesures

### NOTIONS DE BASE GENERALES

Les oscillations sont générées lorsqu'un système écarté de sa position d'équilibre est renvoyé par une force excitatrice dans cette même position d'équilibre. On parle d'oscillation harmonique lorsque la force de rappel du système est à tout moment proportionnelle à l'écart de la position d'équilibre. Les mouvements oscillants d'un pendule élastique vertical en sont un exemple classique, la force de rappel étant alors proportionnelle à l'élongation

du ressort. Cette proportionnalité entre l'élongation et la force de rappel du ressort est décrite par la loi de Hooke.

La relation entre l'élongation  $x$  et la force de rappel  $F$  est donc régie par l'équation

$$(1) \quad F = -k \cdot x \quad \text{avec}$$

$k$  : constante de raideur du ressort

Par conséquent, pour une masse  $m$  accrochée au ressort cylindrique, l'équation du mouvement est de la forme

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0,$$

tant que la masse du ressort elle-même ainsi qu'une éventuelle force de frottement sont négligeables.

En règle générale, la solution à l'équation de mouvement s'écrit :

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right),$$

comme cela est confirmé par l'enregistrement des oscillations harmoniques d'un pendule élastique vertical en fonction du temps, au moyen d'un détecteur de mouvement à ultrasons et en adaptant une fonction sinusoïdale aux données de mesure.

Le détecteur de mouvements à ultrasons mesure la distance entre la masse accrochée au pendule et le détecteur. Par conséquent, mis à part un décalage du point zéro qui peut être compensé par calibration, la grandeur de mesure correspond directement à la valeur  $x(t)$  observée dans l'équation 3.

La période d'oscillation  $T$  est définie comme l'intervalle entre deux points où une onde sinusoïdale traverse l'axe zéro dans le même sens. À partir de l'équation (3), on obtient :

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Afin de vérifier l'équation (4), on réalise des mesures avec différentes combinaisons de masse  $m$  et de constante de raideur  $k$  du ressort, puis on détermine la période d'oscillation en mesurant l'écart entre les deux points où une courbe traverse l'axe zéro dans les données enregistrées ou en adaptant l'équation (3). Les constantes de ressort sont en outre déterminées par des mesures statiques et comparées avec les constantes de ressort des mesures dynamiques.

## LISTE DES APPAREILS

1 Jeu de 5 ressorts cylindriques (Loi de Hooke)	U40816	1003376
1 Jeu de masses à fente, 10 x 10 g	U30031	1003227
1 Jeu de masses à fente, 5 x 50 g	U30033	1003229
1 Socle pour statif, trépied, 150 mm	U13270	1002835
1 Tige statif, 1000 mm	U15004	1002936
1 Noix de serrage avec crochet	U13252	1002828
1 Décamètre à ruban de poche, 2 m	U10073	1002603
1 Détecteur de mouvement EMotion	UCMA-0101021673	
1 Ordinateur		
1 Logiciel		

De plus amples informations sur la mesure numérique sont disponibles sur le site web de l'expérience dans la boutique en ligne 3B.

## MONTAGE ET REALISATION

### Note :

L'expérience est par exemple effectuée pour un pendule à ressort dont les ressorts hélicoïdaux ont une spécification nominale  $k = 2,5, 5$  et  $25 \text{ N/m}$ .

### Mesure statique

- Mettre en place le dispositif de mesure comme dans Fig. 1.
- Suspendre l'un des ressorts hélicoïdaux pour loi de Hooke (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  et  $25 \text{ N/m}$ ) au manchon avec crochet.
- Selon l'épaisseur des ressorts hélicoïdaux, suspendre à la suite les poids du jeu de poids à fente  $10 \times 10 \text{ g}$  ou  $5 \times 50 \text{ g}$  dans le ressort hélicoïdal, mesurer la déviation  $s$  à l'aide du mètre à ruban et reporter les mesures dans Tab. 1.

### Note :

Les supports des jeux de poids à fente s'ajoutent aux dix poids de  $10 \text{ g}$  ou aux cinq de  $50 \text{ g}$ .

- Répéter les mesures pour les autres ressorts hélicoïdaux.

### Mesure dynamique

- Mettre en place le dispositif de mesure comme dans Fig. 1.
- Suspendre l'un des ressorts hélicoïdaux pour loi de Hooke (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  et  $25 \text{ N/m}$ ) au manchon avec crochet.
- Retirer les quatre poids de  $50 \text{ g}$  du jeu de poids à fente  $5 \times 50 \text{ g}$  du support. Suspendre le support dans le ressort hélicoïdal.
- Placer le capteur de mouvement à ultrasons précisément sous le ressort hélicoïdal avec le support suspendu.
- Brancher le capteur de mouvement à ultrasons à l'ordinateur à l'aide du câble USB et démarrer le logiciel.
- Décaler légèrement le pendule à ressort, le relâcher et déclencher simultanément la mesure dans le logiciel.
- Suspendre à la suite les quatre poids de  $50 \text{ g}$  dans le support et répéter à chaque fois la mesure.
- Répéter les mesures pour les autres ressorts hélicoïdaux.

## EXEMPLE DE MESURE

### Mesure statique

Tab. 1 : Déviations  $s$  du ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 2,5 \text{ N/m}$  avec différentes masses suspendues  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3,2
20	7,2
30	11,2
40	15,4
50	19,7
60	23,7
70	27,7
80	31,7
90	36,0
100	40,0

Tab. 2 : Déviations  $s$  du ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 5 \text{ N/m}$  avec différentes masses suspendues  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0,9
20	3,0
30	4,7
40	6,2
50	7,9
60	9,4
70	10,9
80	12,5
90	14,0
100	15,7

Tab. 3 : Déviations  $s$  du ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 25 \text{ N/m}$  avec différentes masses suspendues  $m$

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1,4
100	3,2
150	5,0
200	6,9
250	8,7

### Mesure dynamique

Fig. 2 montre les données d'oscillation enregistrées par le logiciel pour un pendule à ressort avec  $k$  nominal = 5 N/m et  $m = 250 \text{ g}$ . La zone de la courbe de mesure marquée par les lignes pointillées a été adaptée pour confirmation (3) d'une fonction sinus.

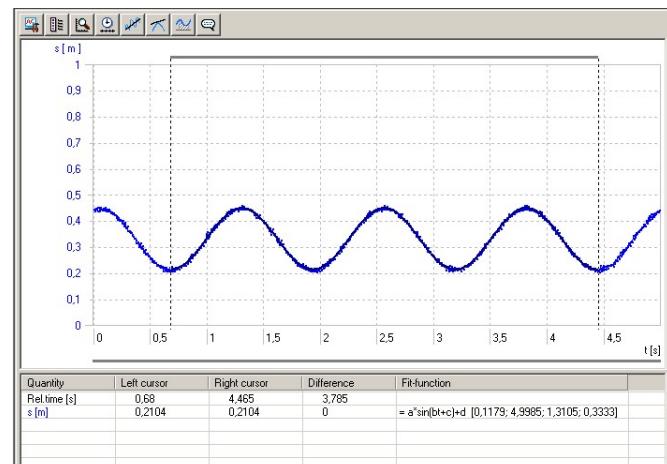


Fig. 2 : Données d'oscillation enregistrées après adaptation d'une fonction sinus. Les lignes pointillées indiquent la zone de l'adaptation

## ÉVALUATION

### Mesure statique

La force du poids  $F_G$  est égale à la force du ressort  $F_F$ , c-à-d selon la loi de Newton et de Hooke :

$$(5) \quad F_G = m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m$$

$$B = \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B}$$

$F_G$  : Force du poids

$m$  : Masse suspendue

$g$  : Accélération due à la gravité

$F_F$  : Force du ressort

$k_s$  : Constante de ressort

$s$  : Déviation du ressort

- Présenter de façon graphique les valeurs de mesure du Tab. 1, 2 et 3 (Fig. 3), adapter une ligne droite  $s = B_s \cdot m$  aux points de mesure et utiliser l'équation (5) et la pente de la droite  $B_s$  pour déterminer la constante de ressort  $k_s$ .

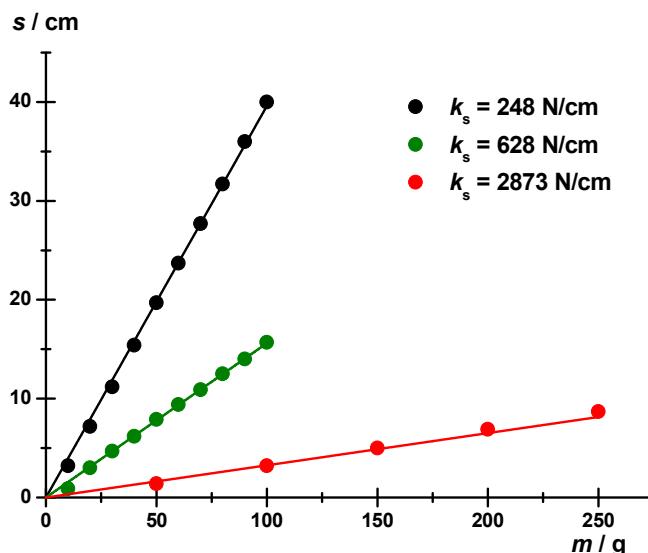


Fig. 3 : Déviation s comme fonction de m

**Mesure dynamique**

- Déterminer la durée périodique  $T$  à partir des données d'oscillation enregistrées.
- Pour cela, lire le temps entre deux passages à zéro directement sur la courbe de mesure et la saisir dans les tableaux 4, 5 et 6. La durée périodique peut également être déterminée à l'aide de l'équation (4) issue de l'adaptation de l'équation (3) à la courbe de mesure.

Tab. 4 : Durées périodiques du pendule à ressort définies à partir des données d'oscillation enregistrées, avec ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 2,5 \text{ N/m}$ 

m / g	T / s	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,937	0,877
100	1,308	1,710
150	1,503	2,258

Tab. 5 : Durées périodiques du pendule à ressort définies à partir des données d'oscillation enregistrées, avec ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 5 \text{ N/m}$ 

m / g	T / s	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,584	0,341
100	0,810	0,656
150	0,992	0,983
200	1,143	1,305
250	1,262	1,592

Tab. 6 : Durées périodiques du pendule à ressort définies à partir des données d'oscillation enregistrées, avec ressort hélicoïdal à spécification nominale  $k = 25 \text{ N/m}$ 

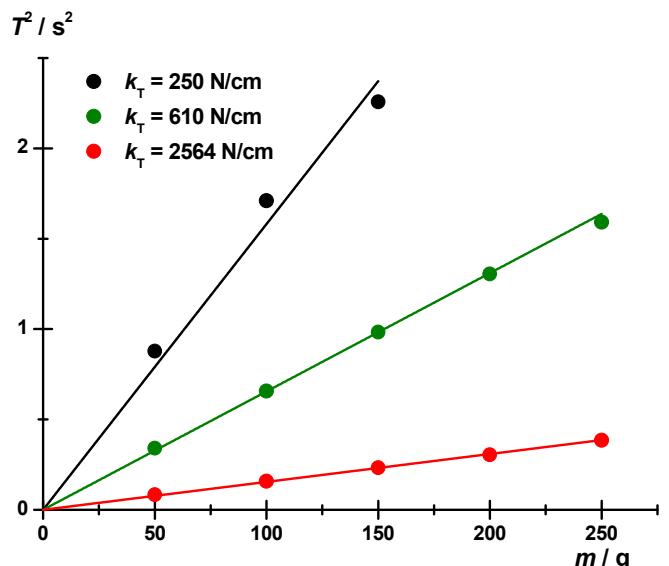
m / g	T / s	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,289	0,084
100	0,398	0,158
150	0,482	0,232
200	0,553	0,305
250	0,619	0,384

L'équation (4) donne :

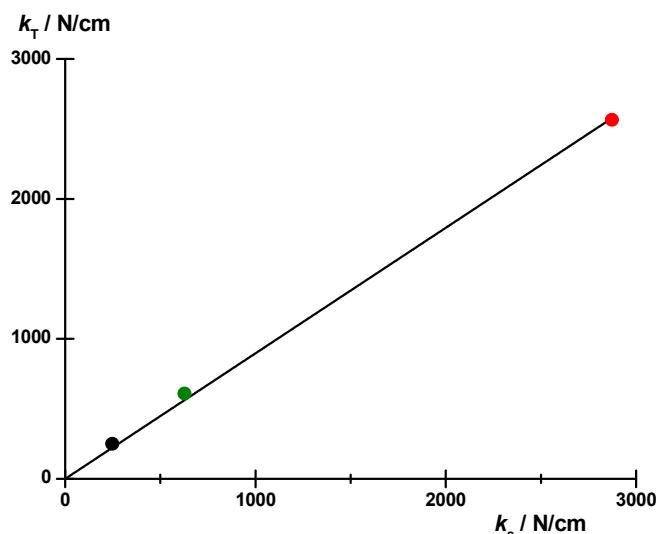
$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m$$

$$B_T = \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T} .$$

- Présenter de façon graphique les valeurs de mesure du Tab. 4, 5 et 6 (Fig. 4), adapter une ligne droite  $T^2 = B_T \cdot m$  aux points de mesure et utiliser l'équation (5) et la pente de la droite  $B_T$  pour déterminer la constante de ressort  $k_T$ .

Fig. 4 : Carré de la durée périodique  $T^2$  comme fonction de m

- Insérer les constantes de ressort  $k_T$  issues des mesures dynamiques par rapport aux constantes de ressort  $k_s$  issues des mesures statiques et adapter une ligne sur les points de mesure (Fig. 5).



L'adaptation de la droite aux points de mesure dans Fig. 5 donne une pente de 0,9, c-à-d que les points de mesure sont proches de la bissectrice. La correspondance des constantes de ressort issues des mesures dynamiques et statiques est confirmée.

Fig. 5 :  $k_T$  comme fonction de  $k_s$  avec droite adaptée

## Oscillazioni armoniche

### MISURAZIONE DELLE OSCILLAZIONI DI A UNA MOLLA AD ELICA CON UN SENSORE DI MOVIMENTO A ULTRASUONI

- Determinazione degli indici di rigidezza  $k$  per diverse molle ad elica.
- Registrazione dell'oscillazione armonica di a una molla ad elica in funzione del tempo con un sensore di movimento a ultrasuoni.
- Determinazione del periodo di oscillazione  $T$  per diverse combinazioni di indice di rigidezza  $k$  e peso  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1: Disposizione per la misurazione

### BASI GENERALI

Le oscillazioni hanno luogo quando un sistema spostato dalla posizione di equilibrio viene richiamato verso la posizione di equilibrio per mezzo di una forza. Si parla di oscillazioni armoniche quando la forza che riporta il sistema in posizione di riposo è proporzionale in qualsiasi momento alla deviazione dalla posizione di riposo. Le oscillazioni di a una molla ad elica sono in merito un classico

esempio. La proporzionalità tra deviazione e forza repulsiva viene descritta tramite la legge di Hooke.

Tra la deviazione  $x$  e la forza repulsiva  $F$  si applica quindi la relazione

$$(1) \quad F = -k \cdot x \quad \text{con}$$

$k$ : Indice di rigidezza

Per un peso  $m$  agganciato alla molla a elica si applica quindi l'equazione di movimento

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 ,$$

finché si possono trascurare il peso della molla e gli smorzamenti dovuti alle forze di attrito.

Le soluzioni di questa equazione del moto hanno la forma comune

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) ,$$

e l'esperimento di registrazione delle oscillazioni armoniche di una molla ad elica in funzione del tempo con il sensore di movimento a ultrasuoni e consente di confermare che i dati si adattano alla funzione sinusoidale.

Il sensore di movimento a ultrasuoni rileva la distanza dal sensore del peso agganciato alla molla. La grandezza misurata corrisponde quindi, ad eccezione di uno spostamento del punto zero compensabile tramite una funzione tara, direttamente ad una grandezza osservata nell'equazione 3, ovvero  $x(t)$ .

Il periodo di oscillazione  $T$  viene definito come la distanza tra due passaggi attraverso lo zero della funzione sinusoidale nella stessa direzione, e si ricava da (3)

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Per la conferma di (4) vengono eseguite misurazioni per le diverse combinazioni di peso  $m$  e indice di rigidezza  $k$  e viene rispettivamente determinato il periodo di oscillazione dalla distanza dei passaggi attraverso lo zero nei dati registrati o un adattamento dell'equazione (3). Gli indici di rigidezza vengono inoltre determinati per mezzo di misurazioni statiche e comparati con quelli derivanti dalle misurazioni dinamiche.

## ELENCO DEGLI STRUMENTI

1 Set molle ad elica per verificare la legge di Hooke	U40816	1003376
1 Set pesi a fessura, 10 x 10 g	U30031	1003227
1 Set pesi a fessura, 5 x 50 g	U30033	1003229
1 Base di supporto, 3 gambe, 150 mm	U13270	1002835
1 Asta di supporto, 1000 mm	U15004	1002936
1 Manicotto con gancio	U13252	1002828
1 Metro a nastro tascabile, 2 m	U10073	1002603
1 Rilevatore di movimento €Motion	UCMA-0101021673	
1 Computer		
1 Software		

Ulteriori informazioni sulla misurazione digitale sono disponibili sul sito web dell'esperimento, nel webshop 3B.

## MONTAGGIO E ESECUZIONE

### Nota:

L'esperimento viene eseguito come esempio per i pendoli a molla le cui molle ad elica sono specificate con valore nominale  $k = 2,5, 5$  e  $25 \text{ N/m}$ .

### Misurazione statica

- Eseguire la disposizione per la misurazione secondo Fig. 1.
- Appendere al manicotto con gancio una delle molle ad elica per legge di Hooke (valore nominale  $k = 2,5, 5, 10, 15$  e  $25 \text{ N/m}$ ).
- In base allo spessore della molla ad elica, appendere in successione alla molla ad elica i pesi facenti parte del set di pesi a fessura  $10 \times 10 \text{ g}$  oppure  $5 \times 50 \text{ g}$  e, con l'ausilio del metro a nastro tascabile, registrare la deviazione  $s$  corrispondente nella Tab. 1.

### Nota:

I supporti dei set di pesi a fessura rientrano tra i dieci pesi da  $10 \text{ g}$  e i cinque da  $50 \text{ g}$ .

- Ripetere la serie di misurazioni per le altre molle ad elica.

### Misurazione dinamica

- Eseguire la disposizione per la misurazione secondo Fig. 1.
- Appendere al manicotto con gancio una delle molle ad elica per la legge di Hooke (valore nominale  $k = 2,5, 5, 10, 15$  e  $25 \text{ N/m}$ ).
- Prelevare dal supporto i quattro pesi da  $50 \text{ g}$  del set di pesi a fessura  $5 \times 50 \text{ g}$ . Appendere il supporto alla molla ad elica.
- Collocare il sensore di movimento a ultrasuoni esattamente al di sotto della molla ad elica con il supporto appeso.
- Con l'ausilio del cavo USB, collegare il sensore di movimento al computer e avviare il software.
- Spostare leggermente il pendolo a molla, rilasciarlo e contemporaneamente iniziare la misurazione nel software.
- Appendere i quattro pesi da  $50 \text{ g}$  in successione al supporto e ripetere la misurazione.
- Ripetere la serie di misurazioni per le altre molle ad elica.

## ESEMPIO DI MISURAZIONE

### Misurazione statica

Tab. 1: Deviazioni  $s$  della molla ad elica specificata con valore nominale  $k = 2,5 \text{ N/m}$  con diverse masse  $m$  appese

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3,2
20	7,2
30	11,2
40	15,4
50	19,7
60	23,7
70	27,7
80	31,7
90	36,0
100	40,0

Tab. 2: Deviazioni  $s$  della molla ad elica specificata con valore nominale  $k = 5 \text{ N/m}$  con diverse masse  $m$  appese

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0,9
20	3,0
30	4,7
40	6,2
50	7,9
60	9,4
70	10,9
80	12,5
90	14,0
100	15,7

Tab. 3: Deviazioni  $s$  della molla ad elica specificata con valore nominale  $k = 25 \text{ N/m}$  con diverse masse  $m$  appese

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1,4
100	3,2
150	5,0
200	6,9
250	8,7

### Misurazione dinamica

La Fig. 2 mostra i dati di oscillazione registrati dal software ad esempio per un pendolo a molla con valore nominale  $k = 5 \text{ N/m}$  e  $m = 250 \text{ g}$ . Sulla zona della curva di misurazione contrassegnata dai cursori è stata adattata una funzione sinusoidale a conferma di (3).

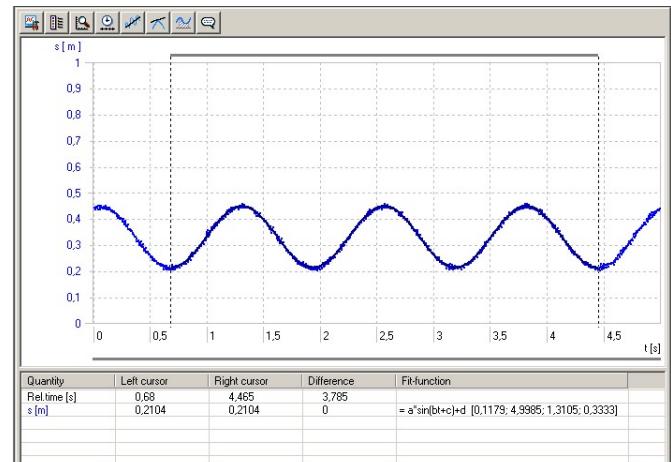


Fig. 2: Dati di oscillazione registrati dopo l'adattamento di una funzione sinusoidale. I cursori segnano l'area dell'adattamento

## ANALISI

### Misurazione statica

La forza peso  $F_G$  è uguale alla forza elastica  $F_F$ , quindi per la legge di Newton e di Hook vale:

$$(5) \quad F_G = m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m$$

$$B = \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B}$$

$F_G$ : forza peso

$m$ : massa appesa

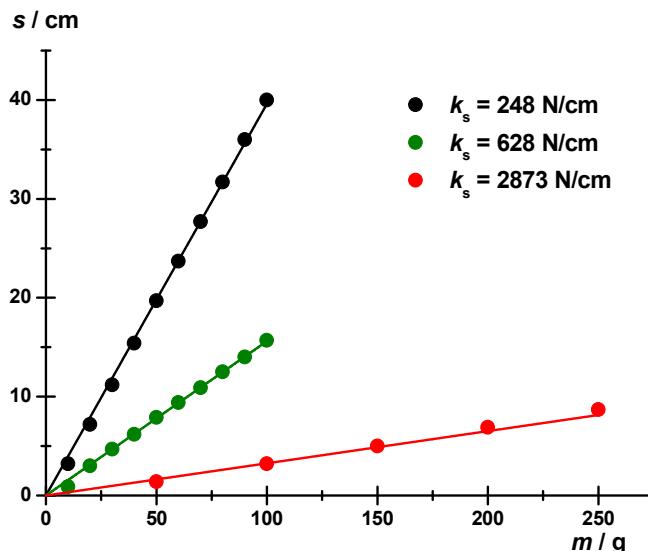
$g$ : accelerazione di gravità

$F_F$ : forza elastica

$k_s$ : indice di rigidezza

$s$ : spostamento della molla

- Rappresentare graficamente i valori di misurazione delle tab. 1, 2 e 3 (Fig. 3), adattare una retta  $s = B_s \cdot m$  ai punti di misurazione e, utilizzando l'equazione (5), determinare in base all'incremento lineare  $B_s$  l'indice di rigidezza  $k_s$ .

Fig. 3: Deviazione  $s$  come funzione di  $m$ **Misurazione dinamica**

- Dai dati di oscillazione registrati rilevare rispettivamente il periodo  $T$ .
- A tale scopo, leggere direttamente dalla curva di misurazione il tempo fra due passaggi attraverso lo zero successivi e registrare nelle tabelle 4, 5 e 6. Il periodo può, in alternativa, essere determinato anche con l'ausilio di dell'equazione (4) dall'adattamento dell'equazione (3) alla curva di misurazione.

Tab. 4: Periodi del pendolo a molla determinati in base ai dati di oscillazione registrati, in cui la molla ad elica è specificata con valore nominale  $k = 2,5$  N/m

$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,937	0,877
100	1,308	1,710
150	1,503	2,258

Tab. 5: Periodi del pendolo a molla determinati in base ai dati di oscillazione registrati, in cui la molla ad elica è specificata con valore nominale  $k = 5$  N/m

$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,584	0,341
100	0,810	0,656
150	0,992	0,983
200	1,143	1,305
250	1,262	1,592

Tab. 6: Periodi del pendolo a molla determinati in base ai dati di oscillazione registrati, in cui la molla ad elica è specificata con valore nominale  $k = 25$  N/m

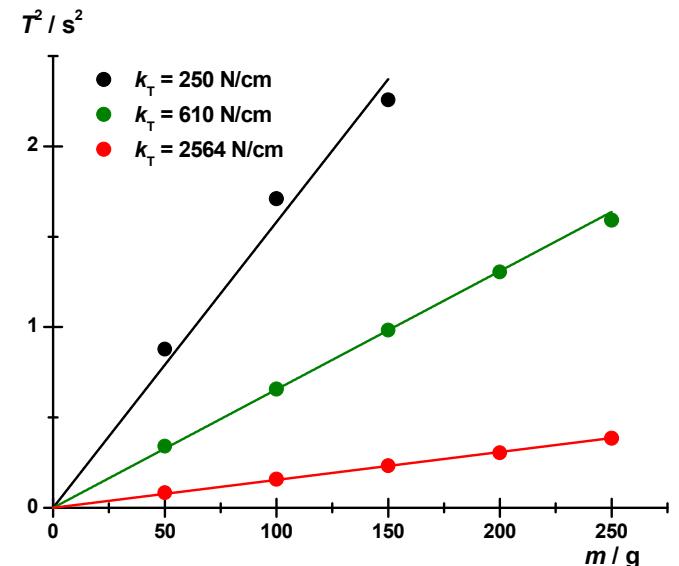
$m / g$	$T / s$	$T^2 / s^2$
50	0,289	0,084
100	0,398	0,158
150	0,482	0,232
200	0,553	0,305
250	0,619	0,384

Dall'equazione (4) consegue che:

$$(6) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m$$

$$B_T = \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T}$$

- Rappresentare graficamente i valori di misurazione delle tab. 4, 5 e 6 (Fig. 4), adattare una retta  $T^2 = B_T \cdot m$  ai punti di misurazione e, utilizzando l'equazione (5), determinare in base all'incremento lineare  $B_T$  l'indice di rigidezza  $k_T$ .

Fig. 4: Quadrato del periodo  $T^2$  come funzione di  $m$ 

- Porre gli indici di rigidezza  $k_T$  ottenuti dalle misurazioni dinamiche contro gli indici di rigidezza  $k_s$  ottenuti dalle misurazioni statiche e adattare una retta ai punti di misurazione (Fig. 5)

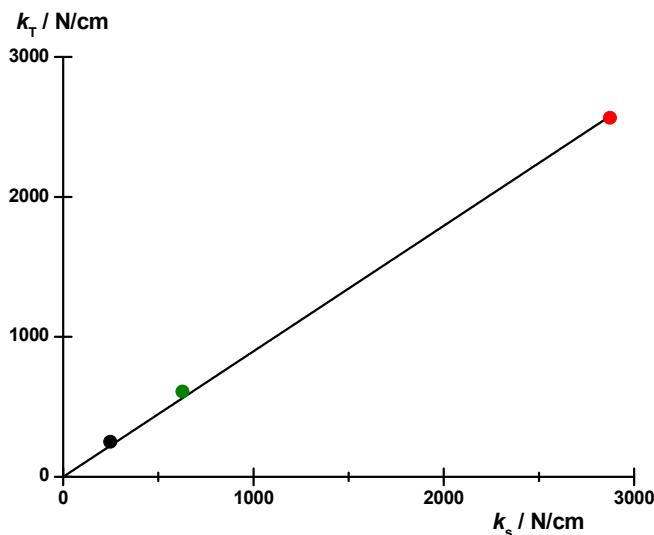


Fig. 5:  $k_T$  come funzione di  $k_s$  con retta adattata

L'adattamento della retta ai punti di misurazione in Fig. 5 genera un incremento di 0,9, cioè i punti di misurazione si trovano in buona approssimazione sulla bisettrice. La corrispondenza degli indici di rigidezza determinati dalle misurazioni dinamiche e statiche è confermata.

## Oscilações harmônicas

### MEDIÇÃO DAS OSCILAÇÕES DE UM PÊNDULO DE MOLA HELICOIDAL COM SENSOR DE MOVIMENTO DE ULTRASSOM

- Determinação estática da constante de mola  $k$  para diferentes molas helicoidais.
- Registro da oscilação harmônica de um pêndulo de mola helicoidal em dependência do tempo com um sensor de movimento de ultrassom.
- Determinação da duração da oscilação  $T$  para diferentes combinações de constante de mola  $k$  e massa  $m$ .

UE1050311

01/24 UD



Fig. 1: Disposição da medição

## FUNDAMENTOS GERAIS

Oscilações são geradas quando um sistema retirado da situação de equilíbrio é retornado à situação de equilíbrio por uma força. Fala-se em oscilações harmônicas quando a força de retorno do sistema ao repouso é proporcional ao desvio do repouso em todos os momentos. As oscilações de um pêndulo de mola helicoidal são exemplo clássico disto. A proporcionalidade entre o deslocamento e a força de retorno é descrita pela Lei de Hooke.

Entre o deslocamento  $x$  e a força de retorno  $F$ , vale, portanto, a relação

$$(1) \quad F = -k \cdot x \text{ com}$$

$k$ : constante de mola.

Para um peso  $m$  pendurado à mola helicoidal, vale, portanto, a equação de movimento

$$(2) \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 ,$$

enquanto a massa da própria mola, bem como uma eventual força de atrito contrária, pode ser negligenciada.

As soluções desta equação de movimento têm a forma geral

$$(3) \quad x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) ,$$

como é confirmado na experiência através do registro das oscilações harmônicas de um pêndulo de mola helicoidal como função do tempo com o sensor de movimento de ultrassom e adaptação de uma função senoidal aos dados de medição.

O sensor de movimento de ultrassom mede a distância entre o peso pendurado ao pêndulo e o sensor. A grandeza de medição corresponde, assim, com exceção um deslocamento de ponto zero compensável por função de tara, imediatamente à grandeza  $x(t)$  observada na equação 3.

Define-se a duração da oscilação  $T$  como a distância entre duas passagens por zero da função senoidal na mesma direção e se obtém, de (3),

$$(4) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Para a confirmação de (4), as medições para diferentes combinações de peso  $m$  e constante de mola  $k$  são realizadas e, a cada vez, é determinada a duração da oscilação a partir da distância das passagens por zero nos dados registrados ou de uma adaptação da equação (3). As constantes de mola são adicionalmente determinadas por medições estáticas e comparadas com as constantes de mola das medições dinâmicas.

## LISTA DE APARELHOS

1 Kit de molas helicoidais para a lei de Hooke	U40816	1003376
1 Conjunto de pesos de entalhe, 10x 10 g	U30031	1003227
1 Conjunto de pesos de entalhe, 5x 50 g	U30033	1003229
1 Tripé, 150 mm	U13270	1002835
1 Vara de apoio, 1000 mm	U15004	1002936
1 Manga com gancho	U13252	1002828
1 Trena, 2 m	U10073	1002603
1 Detector de movimento €Motion	UCMA-0101021673	
1 Computador		
1 Software		

Mais informações sobre a medição digital podem ser encontradas no site do experimento na loja virtual da 3B.

## MONTAGEM E EXECUÇÃO

### Orientação:

A experiência é realizada, a título de exemplo, para os pêndulos de mola, cujas molas helicoidais estão especificadas nominalmente com  $k = 2,5, 5$  e  $25 \text{ N/m}$ .

### Medição estática

- Montar disposição de medição conforme Fig. 1.
- Enganchar uma das molas helicoidais para a Lei de Hooke (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  e  $25 \text{ N/m}$ ) na manga com gancho.
- Conforme a força da mola helicoidal, pendurar sucessivamente os pesos do conjunto de pesos de entalhe 10 x 10 g ou 5 x 50 g na mola helicoidal e, com auxílio da trena, anotar respectivamente o deslocamento  $s$  na Tab. 1.

### Orientação:

Os suportes dos conjuntos de pesos de entalhe fazem parte dos dez pesos de 10 g ou dos cinco pesos de 50 g.

- Repetir a sequência de medições para as outras molas helicoidais.

### Medição dinâmica

- Montar disposição de medição conforme Fig. 1.
- Enganchar uma das molas helicoidais para a Lei de Hooke (nominal  $k = 2,5, 5, 10, 15$  e  $25 \text{ N/m}$ ) na manga com gancho.
- Retirar os quatro pesos de 50 g do conjunto de peso de entalhe 5 x 50 g do suporte. Pendurar o suporte na mola helicoidal.
- Posicionar o sensor de movimento de ultrassom exatamente abaixo da mola helicoidal com o suporte enganchado.
- Conectar o sensor de movimento de ultrassom para o computador com auxílio do cabo USB e ligar o software.
- Deslocar levemente o pêndulo de mola, soltar e simultâneo iniciar a medição no software.
- Pendurar sucessivamente os quatro pesos de 50 g no suporte e repetir a medição respectivamente.
- Repetir a sequência de medições para as outras molas helicoidais.

## EXEMPLO DE MEDIÇÃO

### Medição estática

Tab. 1: Deslocamentos  $s$  da mola helicoidal especificada nominalmente com  $k = 2,5 \text{ N/m}$  com diferentes pesos  $m$  suspensos

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	3,2
20	7,2
30	11,2
40	15,4
50	19,7
60	23,7
70	27,7
80	31,7
90	36,0
100	40,0

Tab. 2: Deslocamentos  $s$  da mola helicoidal especificada nominalmente com  $k = 5 \text{ N/m}$  com diferentes pesos  $m$  suspensos

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
10	0,9
20	3,0
30	4,7
40	6,2
50	7,9
60	9,4
70	10,9
80	12,5
90	14,0
100	15,7

Tab. 3: Deslocamentos  $s$  da mola helicoidal especificada nominalmente com  $k = 25 \text{ N/m}$  com diferentes pesos  $m$  suspensos

$m / \text{g}$	$s / \text{cm}$
50	1,4
100	3,2
150	5,0
200	6,9
250	8,7

### Medição dinâmica

A Fig. 2 mostra os dados de oscilação registrados pelo software, a título de exemplo, para um pêndulo de mola com, nominalmente,  $k = 5 \text{ N/m}$  e  $m = 250 \text{ g}$ . Na área marcada pelos cursores da curva de medição, foi adaptada uma função senoidal para a confirmação de (3).

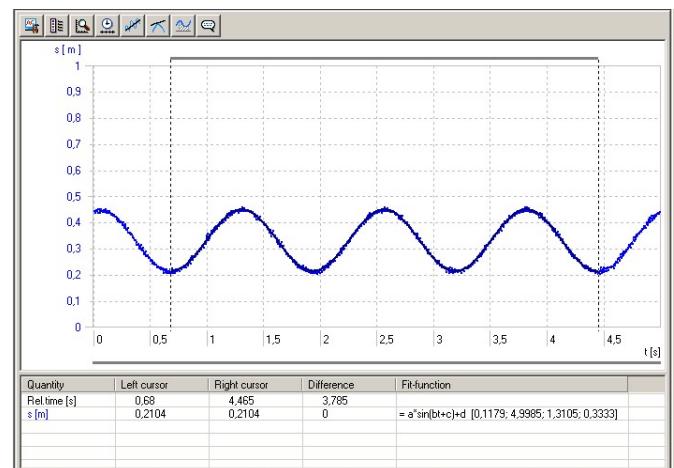


Fig. 2: Dados de oscilação registrados após adaptação de função senoidal. Os cursores marcam a área da adaptação

## ANÁLISE

### Medição estática

A força do peso  $F_G$  é igual à força da mola  $F_F$ , ou seja, conforme as leis de Newton e de Hooke, vale:

$$\begin{aligned} F_G &= m \cdot g = k_s \cdot s = F_F \Leftrightarrow s = \frac{g}{k_s} \cdot m = B \cdot m \\ (5) \quad B &= \frac{g}{k_s} \Leftrightarrow k_s = \frac{g}{B} \end{aligned}$$

$F_G$ : força do peso

$m$ : peso suspenso

$g$ : aceleração da gravidade

$F_F$ : força da mola

$k$ : constante da mola

$s$ : deslocamento da mola

- Representar graficamente os valores de medição das Tab. 1, 2 e 3 (Fig. 3), adaptar respectivamente uma reta  $s = B_s \cdot m$  aos pontos de medição e, com auxílio da equação (5), determinar a constante de mola  $k_s$  a partir da inclinação  $B_s$  da reta.

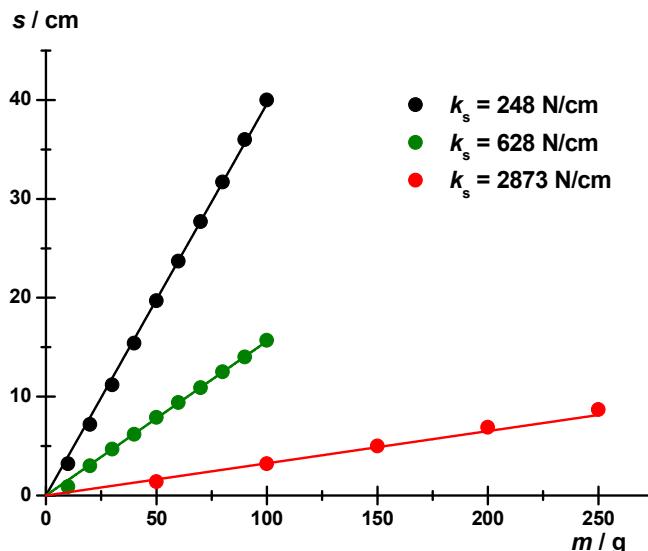


Fig. 3: Deslocamento s como função de m

**Medição dinâmica**

- Determinar, a partir dos dados de oscilação registrados, a respectiva duração de período  $T$ .
- Para tanto, ler o respectivo tempo entre duas passagens alternadas pelo zero diretamente da curva de medição e inserir nas Tabelas 4, 5 e 6. A duração do período pode, alternativamente, também ser determinada, com auxílio da equação (4), a partir da adaptação da equação (3) à curva de medição.

Tab. 4: Durações de período determinadas a partir dos dados de oscilação do pêndulo de mola, cuja mola helicoidal é especificada nominalmente com  $k = 2,5 \text{ N/m}$ 

$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,937	0,877
100	1,308	1,710
150	1,503	2,258

Tab. 5: Durações de período determinadas a partir dos dados de oscilação do pêndulo de mola, cuja mola helicoidal é especificada nominalmente com  $k = 5 \text{ N/m}$ 

$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,584	0,341
100	0,810	0,656
150	0,992	0,983
200	1,143	1,305
250	1,262	1,592

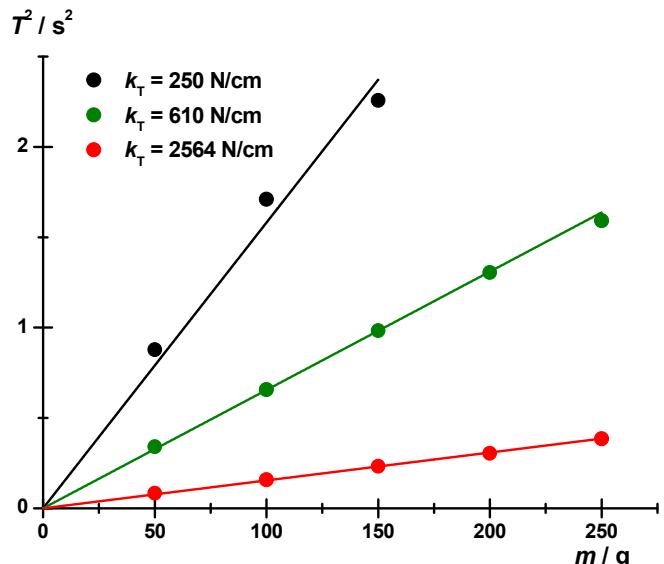
Tab. 6: Durações de período determinadas a partir dos dados de oscilação do pêndulo de mola, cuja mola helicoidal é especificada nominalmente com  $k = 25 \text{ N/m}$ 

$m / \text{g}$	$T / \text{s}$	$T^2 / \text{s}^2$
50	0,289	0,084
100	0,398	0,158
150	0,482	0,232
200	0,553	0,305
250	0,619	0,384

A partir da equação (4), conclui-se:

$$(6) \quad \begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2}{k_T} \cdot m = B_T \cdot m \\ B_T &= \frac{4\pi^2}{k_T} \Leftrightarrow k_T = \frac{4\pi^2}{B_T} \end{aligned}$$

- Representar graficamente os valores de medição das Tab. 4, 5 e 6 (Fig. 4), adaptar respectivamente uma reta  $T^2 = B_T \cdot m$  aos pontos de medição e, com auxílio da equação (5), determinar a constante de mola  $k_T$  a partir da inclinação  $B_T$  da reta.

Fig. 4: Quadrado da duração de período  $T^2$  como função de  $m$ 

- Aplicar as constantes de mola  $k_T$  das medições dinâmicas contra as constantes de mola  $k_s$  das medições estáticas e adaptar uma reta nos pontos de medição (Fig. 5).

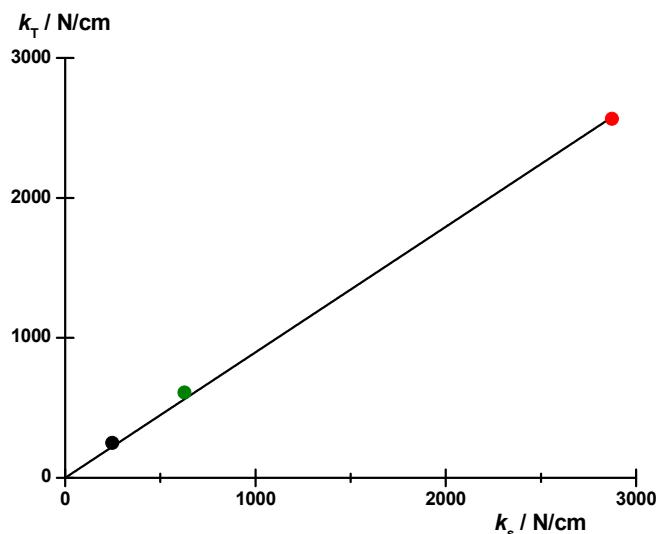


Fig. 5:  $k_T$  como função de  $k_s$  com reta adaptada

A adaptação da reta aos pontos de medição da Fig. 5 resulta em uma inclinação de 0,9, ou seja, os pontos de medição estão em boa aproximação na linha bissetriz. A concordância entre as constantes de mola determinadas pelas medições dinâmicas e estáticas é confirmada.