Trägheitsmoment

BESTIMMUNG DES TRÄGHEITSMOMENTS VERSCHIEDENER PROBEKÖRPER

- Bestimmung der Winkelrichtgröße D_r der Kopplungsfeder.
- Bestimmung des Trägheitsmoments J_0 der Hantelstange ohne Massestücke.
- Bestimmung des Trägheitsmoments J_m der Massestücke in Abhängigkeit vom Abstand r der Massestücke zur Drehachse.
- Bestimmung des Trägheitsmoments J für eine Holzscheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder.
- Bestätigung des Steiner'schen Satzes.

UE1040205

07/15 UD

Fig. 1: Messanordnung.

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung um eine feste Achse wird durch das Trägheitsmoment J angegeben. Es hängt von der Massenverteilung im Körper relativ zur Drehachse ab und ist umso größer je größer die Abstände zur Drehachse sind.

Allgemein ist das Trägheitsmoment definiert über das Volumenintegral:

$$(1) \quad J = \int_V r_s^2 \, \rho(r) \cdot dV$$

r_s: zur Rotationsachse senkrechter Anteil von r

$\rho(r)$: Massenverteilung des Körpers

Für das Beispiel einer Hantelstange, auf der symmetrisch im Abstand r zur Drehachse zwei Massestücke mit der Masse m angeordnet sind, beträgt das Trägheitsmoment:

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

J_0: Trägheitsmoment der Hantelstange ohne Massestücke

J_m: Trägheitsmoment der Massestücke

Nun können die verschiedenen Probekörper auf der Drillachse befestigt werden. Für die Schwingungsdauer T einer Periode gilt:

$$(3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

D_r: Winkelrichtgröße der Kopplungsfeder

D.h. die Schwingungsdauer T ist umso größer, je größer das Trägheitsmoment J ist.

Aus (3) ergibt sich die Bestimmungsgleichung für das Trägheitsmoment:

$$(4) \quad J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

Die Winkelrichtgröße der Kopplungsfeder kann mit Hilfe eines Federkraftmessers bestimmt werden:

$$(5) \quad D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

α: Auslenkung aus der Gleichgewichtslage

GERÄTELISTE

1	Drillachse	U20050	1008662
1	Lichtschranke	U11365	1000563
1	Digitalzähler	U8533341	1001032/3
1	Tonnenfuß, 1000 g	U13265	1002834
1	Stativfuß, 3-Bein, 185 mm	U13271	1002836
1	Präzisionskraftmesser 1 N	U20032	1003104
1	Satz Probekörper zur Drillachse	U20051	1008663

AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

- Messanordnung wie in Fig. 1 gezeigt aufbauen. Drillachse mit Hilfe der Libelle und den Nivellierschrauben am Stativfuß horizontal ausrichten.
- Lichtschranke an den Eingang A des Digitalzählers anschließen. Am Digitalzähler den Wahlschalter für die Betriebsart auf das Symbol zur Messung der Periodenzeiten eines Pendels stellen.

Hinweise:

- Versuchsanordnung immer so auslenken, dass die Kopplungsfeder zusammengedrückt und nicht aufgebogen wird.
- Zu Beginn des Schwingungsvorgangs ist eine Auslenkung von 180° (max. 360°) empfehlenswert.

Bestimmung der Winkelrichtgröße D_r der Kopplungsfeder

- Den Federkraftmesser nacheinander in Abständen von r = 5, 10, 15, 20, 25 und 30 cm vom Zentrum der Drehachse in die Hantelstange einhängen und um α = 180° = π auslenken. Darauf achten, dass der Kraftmesser immer senkrecht zur Hantelstange ausgerichtet ist.
- Am Kraftmesser die Werte für die Kraft ablesen, die zur Auslenkung bei den entsprechenden Abständen benötigt wird. Alle Werte in der Tabelle 1 notieren.

Bestimmung des Trägheitsmoments J_0 der Hantelstange ohne Massestücke

- Die Hantelstange ohne daran befestigte Massestücke um 180° auslenken und mit Hilfe des Digitalzählers die Dauer einer Schwingungsperiode T_0 messen.

Bestimmung des Trägheitsmoments J in Abhängigkeit vom Abstand r der Massestücke zur Drehachse

- Die beiden Massestücke in Abständen von r = 5, 10, 15, 20, 25 und 30 cm jeweils symmetrisch links und rechts vom Zentrum der Drehachse an der Hantelstange befestigen.
- Die Schrauben an den Massestücken, die die Kugelrasten gegen die Hantelstange drücken, nicht betätigen; die Schrauben sind so justiert, dass sich die Massestücke verschieben lassen und dass sie gegen die Zentrifugalkraft gehaltert werden.
- Die Hantelstange um 180° auslenken und mit Hilfe des Digitalzählers jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode T messen und in die Tabelle 2 eintragen.

Bestimmung des Trägheitsmoments J für eine Holzscheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder

- Die Probekörper nacheinander auf der Drillachse montieren. Für den Voll- und den Hohlzylinder den Aufnahmeteller verwenden.
- Zur Messung der Dauer einer Schwingungsperiode jeweils in geeigneter Weise ein Unterbrecher-Fähnchen aus Papier an den Probekörpern anbringen.
- Die Holzscheibe und die Holzkugel nacheinander um 180° auslenken und jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Werte in Tab. 3 eintragen. Die weißen Markierungen an den Probekörpern als Orientierungshilfe bei der Auslenkung verwenden.
- Den Aufnahmeteller um 180° auslenken und die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Wert in Tab. 3 eintragen.
- Den Voll- und den Hohlzylinder im Aufnahmeteller nacheinander um 180° auslenken und jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Werte in Tab. 3 eintragen. Die weißen Markierungen an den Probekörpern als Orientierungshilfe bei der Auslenkung verwenden.

Bestätigung des Steiner'schen Satzes

- Den Bolzen nacheinander in den Bohrungen mit Abstand a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 und 14 cm vom Zentrum der Kreisscheibe befestigen.
- Die Kreissscheibe für die verschiedenen Positionen des Bolzens auf der Drillachse montieren, jeweils um 180° auslenken und die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Dazu in geeigneter Weise ein Fähnchen aus Papier an der Kreisscheibe anbringen. Werte in Tab. 4 eintragen.

MESSBEISPIEL

Bestimmung der Winkelrichtgröße D_r der Kopplungsfeder

Tab. 1: Messwerte für die Kraft F im Abstand r vom Zentrum der Drehachse bei einer statischen Auslenkung der Hantelstange um α = 180° = π.

r / m	F / N
0,05	1,72
0,10	0,86
0,15	0,58
0,20	0,46
0,25	0,32
0,30	0,26

Bestimmung des Trägheitsmoments J_0 der Hantelstange ohne Massestücke

Dauer einer Schwingungsperiode T_0: 2460 ms

Bestimmung des Trägheitsmoments J in Abhängigkeit vom Abstand r der Massestücke zur Drehachse

Tab. 2: Periodendauer T für die Schwingung der Hantelstange mit den im Abstand r an der Hantelstange befestigten Massestücken.

r / m	T / ms
0,05	2825
0,10	3663
0,15	4740
0,20	5926
0,25	7170
0,30	8440

Bestimmung des Trägheitsmoments J für eine Holzscheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder

Tab. 3: Periodendauer T für die Schwingung verschiedener Probekörper.

Probekörper	T / ms
Scheibe	1800
Kugel	1880
Aufnahmeteller	512
Vollzylinder + Aufnahmeteller	917
Hohlzylinder + Aufnahmeteller	1171

Bestätigung des Steiner'schen Satzes

Tab. 4: Periodendauer T für die Schwingung der Kreisscheibe um verschiedene Achsen im Abstand a vom Schwerpunkt.

a / cm	T / ms
0	2922
2	2960
4	3121
6	3327
8	3622
10	3948
12	4359
14	4748

AUSWERTUNG

Bestimmung der Winkelrichtgröße D_r der Kopplungsfeder

Aus (5) folgt:

$$(6) \quad F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r} \quad \text{mit } C = \alpha \cdot D_r$$

- Die Messwerte für die Kräfte F aus Tabelle 1 gegen die Kehrwerte der Abstände $1/r$ auftragen und eine Gerade an die Messpunkte anpassen.

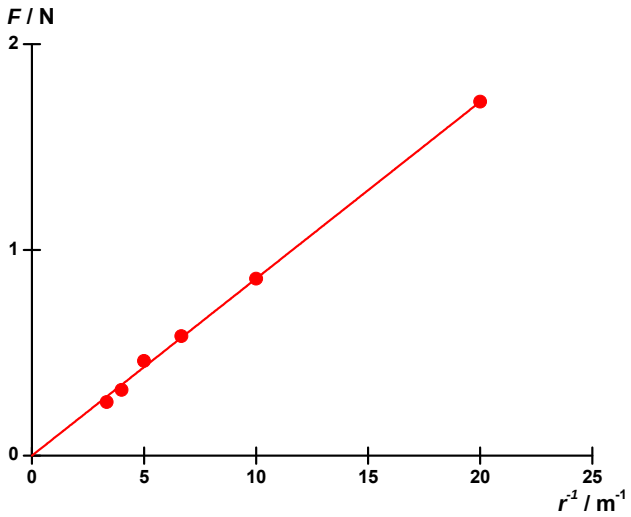

Fig. 2: Kraft F in Abhängigkeit vom Kehrwert des Massenabstandes $1/r$.

- Aus der Geradensteigung C gemäß (6) die Winkelrichtgröße D_r bestimmen:

$$(7) \quad C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0{,}0860\ \text{Nm}}{\pi} = 0{,}0274\ \text{Nm}\ .$$

Bestimmung des Trägheitsmoments J_0 der Hantelstange ohne Massestücke

Für das Trägheitsmoment der Hantelstange ohne Massestücke ergibt sich aus (4):

$$(8)\quad J_0 = 0{,}0274\ \text{Nm} \cdot \frac{(2{,}460\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 4{,}20 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 .$$

Bestimmung des Trägheitsmoments J in Abhängigkeit vom Abstand r der Massestücke zur Drehachse

- Trägheitsmoment J der Hantelstange mit Massestücken gemäß (4) aus den Werten in Tab. 2 bestimmen und in Tab. 5 eintragen.
- Trägheitsmoment J_m der Massestücke gemäß

  $$(9)\quad J_m = J - J_0$$

  bestimmen und in Tab. 5 eintragen.

Tab. 5: Periodendauer T, Trägheitsmoment J der Hantelstange mit Massestücken und Trägheitsmoment J_m der Massestücke für verschiedene Abstände r zur Drehachse.

r / m	T / s	J / 10^{-3} kg·m²	J_m / 10^{-3} kg·m²
0,05	2,825	5,54	1,34
0,10	3,663	9,31	5,11
0,15	4,740	15,6	11,4
0,20	5,926	24,4	20.2
0,25	7,170	35,7	31,5
0,30	8,440	49,4	45.2

Gemäß (2) gilt:

$$(10)\quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Trägheitsmomente J_m aus Tabelle 5 gegen die Quadrate der Abstände r^2 auftragen und die lineare Abhängigkeit in (10) bestätigen (Fig. 3).

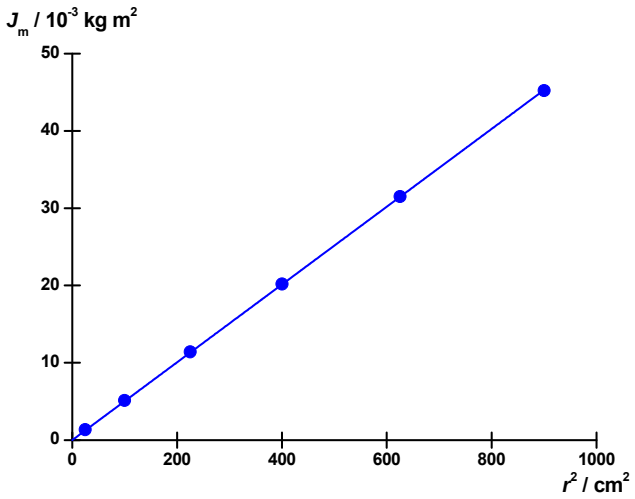

Fig. 3: Trägheitsmoment J_m der Massenstücke in Abhängigkeit vom Quadrat des Massenabstandes r.

Bestimmung des Trägheitsmoments J für eine Holzscheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder

- Trägheitsmomente J für die verschiedenen Probekörper gemäß (4) aus den Messwerten in Tab. 3 bestimmen und die Werte in Tab. 6 eintragen.
- Zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Voll- und Hohlzylinder J_V und J_H jeweils das Trägheitsmoment des Aufnahemtellers J_T von den Werten der Trägheitsmomente von Vollzylinder + Aufnahmeteller und Hohlzylinder + Aufnahmeteller J_{VT} und J_{HT} subtrahieren:

  $$(11)\quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned} .$$

- TheoretischeTrägheitsmomente J_{th} mit Hilfe der Daten im Anhang berechnen, in Tab. 6 eintragen und mit den aus der Messung bestimmten Werten vergleichen.

Tab. 6: Trägheitsmomente J für verschiedene Probekörper.

Probekörper	T / s	J / 10^{-3} kg·m²	J_{th} / 10^{-3} kg·m²
Scheibe	1,800	2,25	$^1/_2 \cdot m \cdot r^2$ = 2,57
Kugel	1,880	2,45	$^2/_5 \cdot m \cdot r^2$ = 2,54
Aufnahmeteller	0,512	0,18	–
Vollzylinder + Aufnahmeteller	0,917	0,58	–
Vollzylinder	–	0,40	$^1/_2 \cdot m \cdot r^2$ = 0,43
Hohlzylinder + Aufnahmeteller	1,171	0,95	–
Hohlzylinder	–	0,77	$m \cdot r^2$ = 0,86

Die aus der Messung bestimmten Werte stimmen gut mit den theoretisch berechneten Werten überein.

Bestätigung des Steiner'schen Satzes

- Trägheitsmomente J_a für die verschiedenen Abstände a gemäß (4) aus den Messwerten in Tab. 4 bestimmen und die Werte in Tab. 7 eintragen.

Tab. 7: Trägheitsmoment J_a der Kreisscheibe bei Schwingung um verschiedene Achsen im Abstand a vom Schwerpunkt.

a / cm	T / s	J_a / 10^{-3} kg·m²
0	2,922	5,93
2	2,960	6,08
4	3,121	6,76
6	3,327	7,68
8	3,622	9,11
10	3,948	10,8
12	4,359	13,2
14	4,748	15,6

- Gemäß dem Steiner'schen Satz gilt:

  (12) $J_a = J_0 + m \cdot a^2$ mit $J_0 = J_a(a = 0)$

- $J_a - J_0$ gegen a^2 auftragen, die lineare Abhängigkeit in (12) und damit den Steiner'schen Satz bestätigen (Fig. 4).

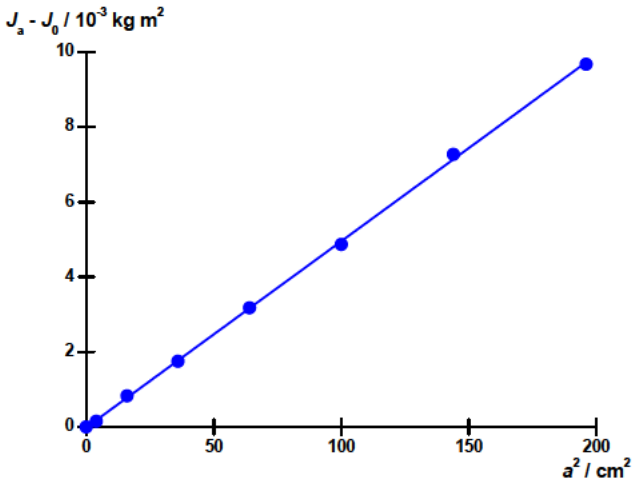

Fig. 4: Differenz der Trägheitsmomente $J_a - J_0$ der Kreisscheibe in Abhängigkeit vom Abstand a der Schwingungsachse vom Schwerpunkt.

ANHANG: TECHNISCHE DATEN

Hantelstange	
Länge:	620 mm
Masse:	ca. 135 g
Masse der beiden Massestücke:	je 260 g
Kreisscheibe	
Durchmesser:	320 mm
Masse:	ca. 495 g
Bohrungen:	8
Abstand der Bohrungen:	20 mm
Kugel (Holz)	
Durchmesser:	146 mm
Masse:	ca. 1190 g
Scheibe (Holz)	
Durchmesser:	220 mm
Höhe:	15 mm
Masse:	ca. 425 g
Aufnahmeteller	
Durchmesser:	100 mm
Masse:	ca. 122 g
Vollzylinder (Holz)	
Durchmesser:	90 mm
Höhe:	90 mm
Masse:	ca. 425 g
Hohlzylinder (Metall)	
Außendurchmesser:	90 mm
Höhe:	90 mm
Masse:	ca. 425 g

© Copyright 2015 3B Scientific GmbH