

## Trägheitsmoment

### BESTIMMUNG DES TRÄGHEITSMOMENTS VERSCHIEDENER PROBEKÖRPER

- Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D_T$  der Kopplungsfeder.
- Bestimmung des Trägheitsmoments  $J_0$  der Hantelstange ohne Massestücke.
- Bestimmung des Trägheitsmoments  $J_m$  der Massestücke in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der Massestücke zur Drehachse.
- Bestimmung des Trägheitsmoments  $J$  für eine Holzscheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder.
- Bestätigung des Steiner'schen Satzes.

UE1040205

07/15 UD



Fig. 1: Messanordnung.

### ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Die Trägheit eines starren Körpers gegenüber einer Änderung seiner Rotationsbewegung um eine feste Achse wird durch das Trägheitsmoment  $J$  angegeben. Es hängt von der Massenverteilung im Körper relativ zur Drehachse ab und ist umso größer je größer die Abstände zur Drehachse sind.

Allgemein ist das Trägheitsmoment definiert über das Volumenintegral:

$$(1) \quad J = \int_V r_s^2 \rho(r) \cdot dV$$

$r_s$ : zur Rotationsachse senkrechter Anteil von  $r$

$\rho(r)$ : Massenverteilung des Körpers

Für das Beispiel einer Hantelstange, auf der symmetrisch im Abstand  $r$  zur Drehachse zwei Massestücke mit der Masse  $m$  angeordnet sind, beträgt das Trägheitsmoment:

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

$J_0$ : Trägheitsmoment der Hantelstange ohne Massestücke

$J_m$ : Trägheitsmoment der Massestücke

Nun können die verschiedenen Probekörper auf der Drillachse befestigt werden. Für die Schwingungsdauer  $T$  einer Periode gilt:

$$(3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

$D_r$ : Winkelrichtgröße der Kopplungsfeder

D.h. die Schwingungsdauer  $T$  ist umso größer, je größer das Trägheitsmoment  $J$  ist.

Aus (3) ergibt sich die Bestimmungsgleichung für das Trägheitsmoment:

$$(4) \quad J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

Die Winkelrichtgröße der Kopplungsfeder kann mit Hilfe eines Federkraftmessers bestimmt werden:

$$(5) \quad D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

$\alpha$ : Auslenkung aus der Gleichgewichtslage

## GERÄTELISTE

|   |                                 |          |           |
|---|---------------------------------|----------|-----------|
| 1 | Drillachse                      | U20050   | 1008662   |
| 1 | Lichtschränke                   | U11365   | 1000563   |
| 1 | Digitalzähler                   | U8533341 | 1001032/3 |
| 1 | Tonnenfuß, 1000 g               | U13265   | 1002834   |
| 1 | Stativfuß, 3-Bein, 185 mm       | U13271   | 1002836   |
| 1 | Präzisionskraftmesser 1 N       | U20032   | 1003104   |
| 1 | Satz Probekörper zur Drillachse | U20051   | 1008663   |

## AUFBAU UND DURCHFÜHRUNG

- Messanordnung wie in Fig. 1 gezeigt aufbauen. Drillachse mit Hilfe der Libelle und den Nivellierschrauben am Stativfuß horizontal ausrichten.
- Lichtschränke an den Eingang A des Digitalzählers anschließen. Am Digitalzähler den Wahlschalter für die Betriebsart auf das Symbol zur Messung der Periodenzeiten eines Pendels stellen.

### Hinweise:

- Versuchsanordnung immer so auslenken, dass die Kopplungsfeder zusammengedrückt und nicht aufgebogen wird.
- Zu Beginn des Schwingungsvorgangs ist eine Auslenkung von  $180^\circ$  (max.  $360^\circ$ ) empfehlenswert.

### Bestimmung der Winkelrichtgröße $D_r$ der Kopplungsfeder

- Den Federkraftmesser nacheinander in Abständen von  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  und  $30$  cm vom Zentrum der Drehachse in die Hantelstange einhängen und um  $\alpha = 180^\circ = \pi$  auslenken. Darauf achten, dass der Kraftmesser immer senkrecht zur Hantelstange ausgerichtet ist.
- Am Kraftmesser die Werte für die Kraft ablesen, die zur Auslenkung bei den entsprechenden Abständen benötigt wird. Alle Werte in der Tabelle 1 notieren.

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J_0$ der Hantelstange ohne Massestücke

- Die Hantelstange ohne daran befestigte Massestücke um  $180^\circ$  auslenken und mit Hilfe des Digitalzählers die Dauer einer Schwingungsperiode  $T_0$  messen.

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J$ in Abhängigkeit vom Abstand $r$ der Massestücke zur Drehachse

- Die beiden Massestücke in Abständen von  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  und  $30$  cm jeweils symmetrisch links und rechts vom Zentrum der Drehachse an der Hantelstange befestigen.
- Die Schrauben an den Massestücken, die die Kugelrasten gegen die Hantelstange drücken, nicht betätigen; die Schrauben sind so justiert, dass sich die Massestücke verschieben lassen und dass sie gegen die Zentrifugalkraft gehalten werden.
- Die Hantelstange um  $180^\circ$  auslenken und mit Hilfe des Digitalzählers jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode  $T$  messen und in die Tabelle 2 eintragen.

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J$ für eine Holz-scheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder

- Die Probekörper nacheinander auf der Drillachse montieren. Für den Voll- und den Hohlzylinder den Aufnahmeteller verwenden.
- Zur Messung der Dauer einer Schwingungsperiode jeweils in geeigneter Weise ein Unterbrecher-Fähnchen aus Papier an den Probekörpern anbringen.
- Die Holz-scheibe und die Holzkugel nacheinander um  $180^\circ$  auslenken und jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Werte in Tab. 3 eintragen. Die weißen Markierungen an den Probekörpern als Orientierungshilfe bei der Auslenkung verwenden.
- Den Aufnahmeteller um  $180^\circ$  auslenken und die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Wert in Tab. 3 eintragen.
- Den Voll- und den Hohlzylinder im Aufnahmeteller nacheinander um  $180^\circ$  auslenken und jeweils die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Werte in Tab. 3 eintragen. Die weißen Markierungen an den Probekörpern als Orientierungshilfe bei der Auslenkung verwenden.

### Bestätigung des Steiner'schen Satzes

- Den Bolzen nacheinander in den Bohrungen mit Abstand  $a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$  und  $14$  cm vom Zentrum der Kreisscheibe befestigen.
- Die Kreisscheibe für die verschiedenen Positionen des Bolzens auf der Drillachse montieren, jeweils um  $180^\circ$  auslenken und die Dauer einer Schwingungsperiode messen. Dazu in geeigneter Weise ein Fähnchen aus Papier an der Kreisscheibe anbringen. Werte in Tab. 4 eintragen.

## MESSBEISPIEL

**Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D_r$  der Kopplungsfeder**

Tab. 1: Messwerte für die Kraft  $F$  im Abstand  $r$  vom Zentrum der Drehachse bei einer statischen Auslenkung der Hantelstange um  $\alpha = 180^\circ = \pi$ .

| $r / \text{m}$ | $F / \text{N}$ |
|----------------|----------------|
| 0,05           | 1,72           |
| 0,10           | 0,86           |
| 0,15           | 0,58           |
| 0,20           | 0,46           |
| 0,25           | 0,32           |
| 0,30           | 0,26           |

**Bestimmung des Trägheitsmoments  $J_0$  der Hantelstange ohne Massestücke**

Dauer einer Schwingungsperiode  $T_0$ : 2460 ms

**Bestimmung des Trägheitsmoments  $J$  in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der Massestücke zur Drehachse**

Tab. 2: Periodendauer  $T$  für die Schwingung der Hantelstange mit den im Abstand  $r$  an der Hantelstange befestigten Massestücken.

| $r / \text{m}$ | $T / \text{ms}$ |
|----------------|-----------------|
| 0,05           | 2825            |
| 0,10           | 3663            |
| 0,15           | 4740            |
| 0,20           | 5926            |
| 0,25           | 7170            |
| 0,30           | 8440            |

**Bestimmung des Trägheitsmoments  $J$  für eine Holz-scheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder**

Tab. 3: Periodendauer  $T$  für die Schwingung verschiedener Probekörper.

| Probekörper                   | $T / \text{ms}$ |
|-------------------------------|-----------------|
| Scheibe                       | 1800            |
| Kugel                         | 1880            |
| Aufnahmeteller                | 512             |
| Vollzylinder + Aufnahmeteller | 917             |
| Hohlzylinder + Aufnahmeteller | 1171            |

**Bestätigung des Steiner'schen Satzes**

Tab. 4: Periodendauer  $T$  für die Schwingung der Kreisscheibe um verschiedene Achsen im Abstand  $a$  vom Schwerpunkt.

| $a / \text{cm}$ | $T / \text{ms}$ |
|-----------------|-----------------|
| 0               | 2922            |
| 2               | 2960            |
| 4               | 3121            |
| 6               | 3327            |
| 8               | 3622            |
| 10              | 3948            |
| 12              | 4359            |
| 14              | 4748            |

## AUSWERTUNG

**Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D_r$  der Kopplungsfeder**

Aus (5) folgt:

$$(6) \quad F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r} \quad \text{mit } C = \alpha \cdot D_r$$

- Die Messwerte für die Kräfte  $F$  aus Tabelle 1 gegen die Kehrwerte der Abstände  $1/r$  auftragen und eine Gerade an die Messpunkte anpassen.

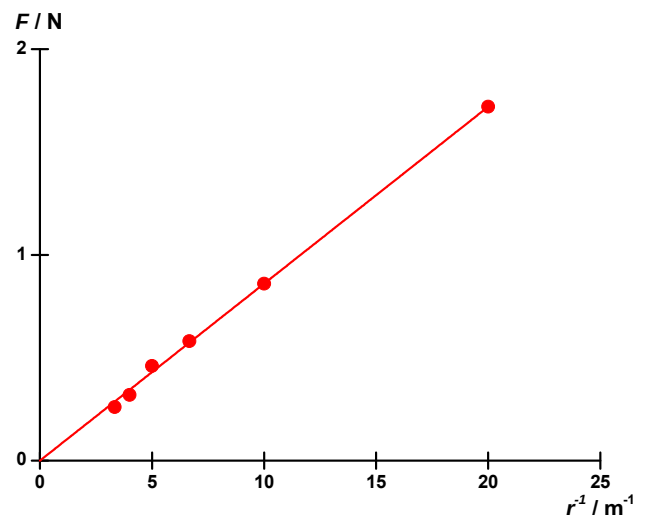


Fig. 2: Kraft  $F$  in Abhängigkeit vom Kehrwert des Massenabstandes  $1/r$ .

- Aus der Geradensteigung  $C$  gemäß (6) die Winkelrichtgröße  $D_r$  bestimmen:

$$(7) \quad C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0,0860 \text{ Nm}}{\pi} = 0,0274 \text{ Nm}$$

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J_0$ der Hantelstange ohne Massestücke

Für das Trägheitsmoment der Hantelstange ohne Massestücke ergibt sich aus (4):

$$(8) \quad J_0 = 0,0274 \text{ Nm} \cdot \frac{(2,460 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J$ in Abhängigkeit vom Abstand $r$ der Massestücke zur Drehachse

- Trägheitsmoment  $J$  der Hantelstange mit Massestücken gemäß (4) aus den Werten in Tab. 2 bestimmen und in Tab. 5 eintragen.

- Trägheitsmoment  $J_m$  der Massestücke gemäß

$$(9) \quad J_m = J - J_0$$

bestimmen und in Tab. 5 eintragen.

Tab. 5: Periodendauer  $T$ , Trägheitsmoment  $J$  der Hantelstange mit Massestücken und Trägheitsmoment  $J_m$  der Massestücke für verschiedene Abstände  $r$  zur Drehachse.

| $r / \text{m}$ | $T / \text{s}$ | $J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ | $J_m / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
|----------------|----------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 0,05           | 2,825          | 5,54                                      | 1,34                                        |
| 0,10           | 3,663          | 9,31                                      | 5,11                                        |
| 0,15           | 4,740          | 15,6                                      | 11,4                                        |
| 0,20           | 5,926          | 24,4                                      | 20,2                                        |
| 0,25           | 7,170          | 35,7                                      | 31,5                                        |
| 0,30           | 8,440          | 49,4                                      | 45,2                                        |

Gemäß (2) gilt:

$$(10) \quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Trägheitsmomente  $J_m$  aus Tabelle 5 gegen die Quadrate der Abstände  $r^2$  auftragen und die lineare Abhängigkeit in (10) bestätigen (Fig. 3).

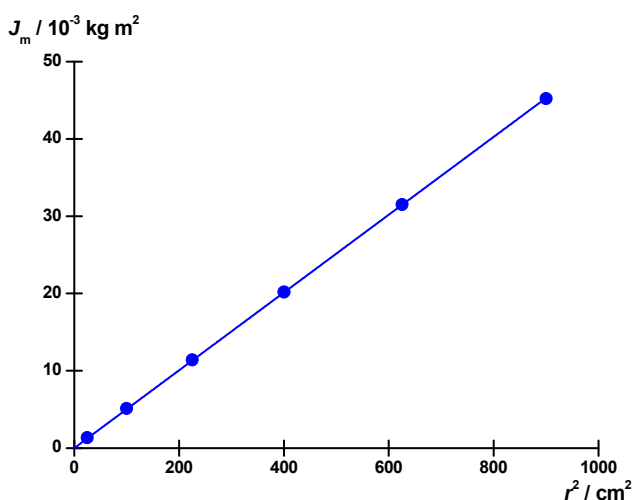


Fig. 3: Trägheitsmoment  $J_m$  der Massenstücke in Abhängigkeit vom Quadrat des Massenabstandes  $r$ .

### Bestimmung des Trägheitsmoments $J$ für eine Holz-scheibe, eine Holzkugel, einen Voll- und einen Hohlzylinder

- Trägheitsmomente  $J$  für die verschiedenen Probekörper gemäß (4) aus den Messwerten in Tab. 3 bestimmen und die Werte in Tab. 6 eintragen.
- Zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Voll- und Hohlzylinder  $J_V$  und  $J_H$  jeweils das Trägheitsmoment des Aufnahmetellers  $J_T$  von den Werten der Trägheitsmomente von Vollzylinder + Aufnahmeteller und Hohlzylinder + Aufnahmeteller  $J_{VT}$  und  $J_{HT}$  subtrahieren:

$$(11) \quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned}$$

- Theoretische Trägheitsmomente  $J_{th}$  mit Hilfe der Daten im Anhang berechnen, in Tab. 6 eintragen und mit den aus der Messung bestimmten Werten vergleichen.

Tab. 6: Trägheitsmomente  $J$  für verschiedene Probekörper.

| Probekörper                   | $T / \text{s}$ | $J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ | $J_{th} / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
|-------------------------------|----------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Scheibe                       | 1,800          | 2,25                                      | $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 2,57$         |
| Kugel                         | 1,880          | 2,45                                      | $\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 = 2,54$         |
| Aufnahmeteller                | 0,512          | 0,18                                      | –                                              |
| Vollzylinder + Aufnahmeteller | 0,917          | 0,58                                      | –                                              |
| Vollzylinder                  | –              | 0,40                                      | $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = 0,43$         |
| Hohlzylinder + Aufnahmeteller | 1,171          | 0,95                                      | –                                              |
| Hohlzylinder                  | –              | 0,77                                      | $m \cdot r^2 = 0,86$                           |

Die aus der Messung bestimmten Werte stimmen gut mit den theoretisch berechneten Werten überein.

### Bestätigung des Steiner'schen Satzes

- Trägheitsmomente  $J_a$  für die verschiedenen Abstände  $a$  gemäß (4) aus den Messwerten in Tab. 4 bestimmen und die Werte in Tab. 7 eintragen.

Tab. 7: Trägheitsmoment  $J_a$  der Kreisscheibe bei Schwingung um verschiedene Achsen im Abstand  $a$  vom Schwerpunkt.

| $a / \text{cm}$ | $T / \text{s}$ | $J_a / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ |
|-----------------|----------------|---------------------------------------------|
| 0               | 2,922          | 5,93                                        |
| 2               | 2,960          | 6,08                                        |
| 4               | 3,121          | 6,76                                        |
| 6               | 3,327          | 7,68                                        |
| 8               | 3,622          | 9,11                                        |
| 10              | 3,948          | 10,8                                        |
| 12              | 4,359          | 13,2                                        |
| 14              | 4,748          | 15,6                                        |

- Gemäß dem Steiner'schen Satz gilt:

$$(12) J_a = J_0 + m \cdot a^2 \text{ mit } J_0 = J_a (a = 0)$$

- $J_a - J_0$  gegen  $a^2$  auftragen, die lineare Abhängigkeit in (12) und damit den Steiner'schen Satz bestätigen (Fig. 4).

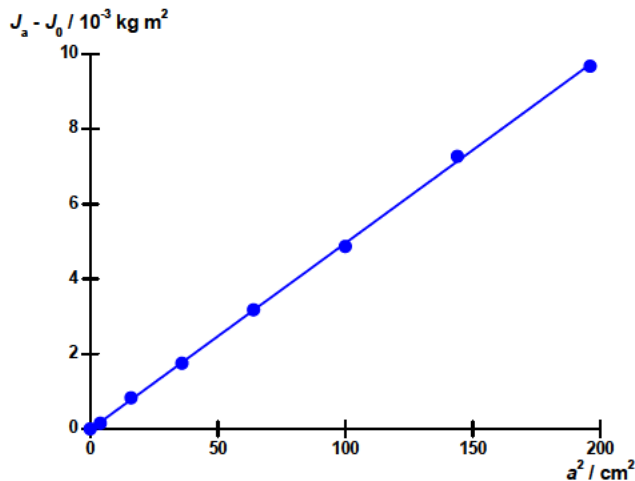


Fig. 4: Differenz der Trägheitsmomente  $J_a - J_0$  der Kreisscheibe in Abhängigkeit vom Abstand  $a$  der Schwungsachse vom Schwerpunkt.

## ANHANG: TECHNISCHE DATEN

### Hantelstange

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| Länge:                        | 620 mm    |
| Masse:                        | ca. 135 g |
| Masse der beiden Massestücke: | je 260 g  |

### Kreisscheibe

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| Durchmesser:           | 320 mm    |
| Masse:                 | ca. 495 g |
| Bohrungen:             | 8         |
| Abstand der Bohrungen: | 20 mm     |

### Kugel (Holz)

|              |            |
|--------------|------------|
| Durchmesser: | 146 mm     |
| Masse:       | ca. 1190 g |

### Scheibe (Holz)

|              |           |
|--------------|-----------|
| Durchmesser: | 220 mm    |
| Höhe:        | 15 mm     |
| Masse:       | ca. 425 g |

### Aufnahmeteller

|              |           |
|--------------|-----------|
| Durchmesser: | 100 mm    |
| Masse:       | ca. 122 g |

### Vollzylinder (Holz)

|              |           |
|--------------|-----------|
| Durchmesser: | 90 mm     |
| Höhe:        | 90 mm     |
| Masse:       | ca. 425 g |

### Hohlzylinder (Metall)

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| Außendurchmesser: | 90 mm     |
| Höhe:             | 90 mm     |
| Masse:            | ca. 425 g |