

## Parábola

### ESBOÇO PONTILHADO DA “PARÁBOLA”

- Determinação do comprimento do arremesso em dependência do ângulo de lançamento e a velocidade do lançamento.
- Cálculo da velocidade do lançamento a partir do comprimento máximo do arremesso.
- Esboço pontilhado da “parábola de lançamento” em dependência do ângulo de lançamento.
- Comprovação do princípio de superposição.

UE1030400

03/16 JS

### FUNDAMENTOS GERAIS

O movimento da esfera, que sofre ação de um campo gravitacional sob um ângulo horizontal, se comporta de acordo com o princípio da superposição no movimento com velocidade constante na direção do arremesso e no movimento de queda também. Isso resulta numa curva em forma de parábola, cuja altura e comprimento são dependentes do ângulo  $\alpha$  e da velocidade  $v_0$ .

Para calcular a curva de forma simplificada, deixa-se a origem do sistema de coordenadas no ponto referente ao centro da bola e nele o instante inicial e despreza-se a resistência do ar. Então a bola se mantém na direção horizontal, sua velocidade inicial.

$$v_x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

e chega no instante  $t$  o deslocamento horizontal

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (2)$$

Na direção vertical, a esfera percorre sob ação do campo gravitacional à aceleração da gravidade  $g$ . No instante  $t$ , mantém a sua velocidade

$$v_y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \quad (3)$$

e o deslocamento vertical

$$y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4)$$

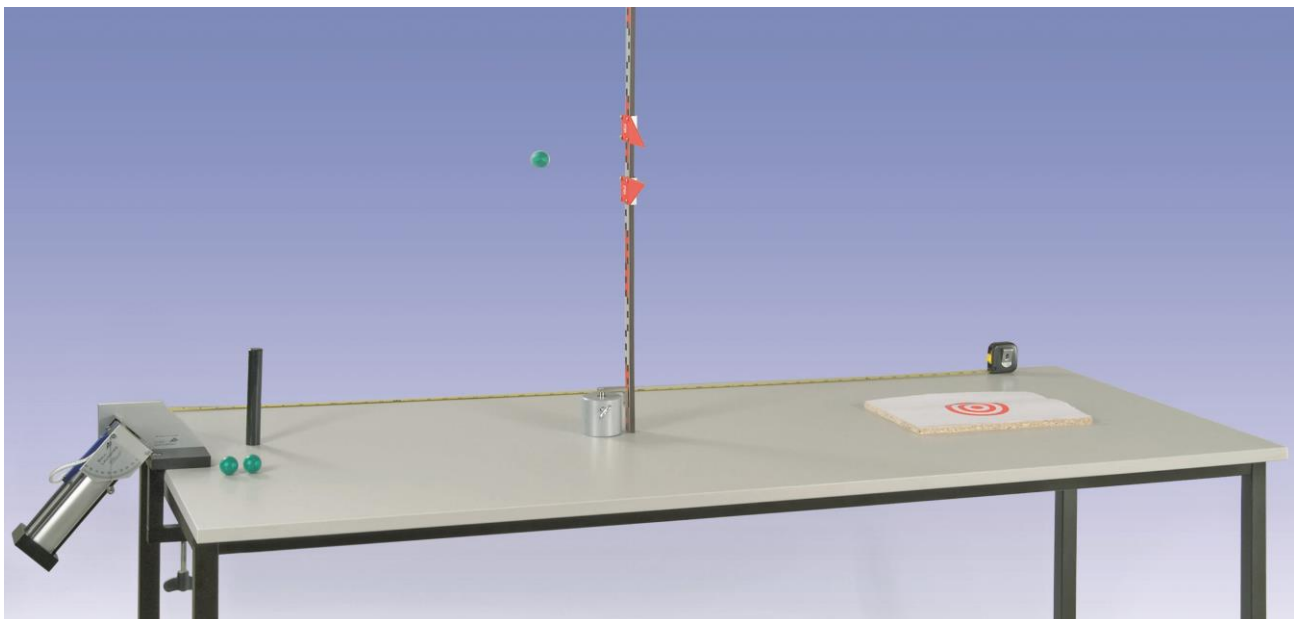


Fig. 1: Arranjo de medição para o esboço pontilhado das “parábolas de lançamento”

**LISTA DE APARELHOS**

1 Aparelho de lançamento	1002654 (U10360)
1 Suporte para o dispositivo de lançamento	1002655 (U10361)
1 Medidor de alturas, 1 m	1000743 (U8401560)
1 Conjunto de indicadores para o metro	1006494 (U8401570)
1 Base em tonel, 1 kg	1002834 (U13265)
1 Fita métrica, 2 m	1002603 (U10073)

A curva da esfera tem como forma uma parábola, que é definida pela equação.

$$y(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{(v_0 \cdot \cos \alpha)^2} \cdot x^2 \tag{5}$$

no instante

$$t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \tag{6}$$

a esfera chega ao ponto mais alto da parábola e no instante

$$t_2 = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \tag{7}$$

novamente à altura inicial 0. a altura da parábola é

$$h = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2 \alpha \tag{8}$$

e o comprimento

$$s = x(t_2) = 2 \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \tag{9}$$

Na experiência, as curvas de uma esfera de madeira sob uso de uma barra com dois ponteiros, farão o levantamento da topografia a partir do ângulo de lançamento e da velocidade (veja fig. 3). A componente horizontal  $x$  da curva de vôo resulta da distancia horizontal  $X$  para o canto direito do suporte, determinada com uma fita métrica:

$$x = X + 110\text{mm} \tag{10}$$

A componente vertical  $y$  calcula-se a partir das posições  $Y_1$  e  $Y_2$  dos dois ponteiros na suposição, que a esfera vai voar

preciso a través do meio. Em isso há que tomar em consideração, que o ponto zero da medição de altura esta na altura do canto superior da mesa, enquanto a esfera sai 37,5 mm acima:

$$y = \frac{Y_2 + Y_1}{2} - 37,5\text{mm} \tag{11}$$

A divergência máxima do valor verdadeiro, do valor calculado é

$$\Delta y = \frac{Y_2 - Y_1}{2} - 12,5\text{mm} \tag{12}$$

**MONTAGEM**

- Apertar firmemente o suporte para o aparelho de lançamento no lado frontal de uma mesa de pelo menos 2 m de comprimento e montar o aparelho de lançamento segundo as instruções de operação.
- Começando no canto direito do suporte para o aparelho de lançamento, desenrolar a fita métrica e fixar na mesa.
- Dispor o alvo da Fig. 2 numa base de 25 mm de espessura sobre a mesa a alguma distancia do aparelho de lançamento.
- Montar atrás uma parede “apanhadora” para a esfera que continua saltando.



Fig. 2: Alvo para a aterrissagem da esfera

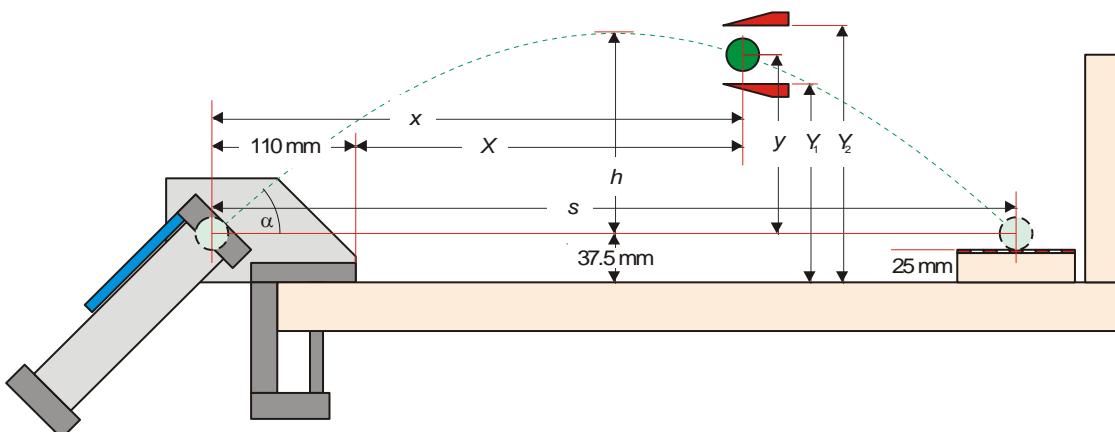


Fig. 3: Representação esquemática

## INDICAÇÕES DE SEGURANÇA

- Não obstante que a energia do lançamento é muito pequena, a esfera não deve em nenhum caso acertar no olho.
- Nunca olhar para a corrida do aparelho de lançamento!
- A posição da esfera somente pode ser verificada pelas furações laterais do aparelho de lançamento.
- Antes de o lançamento assegurar-se que não se encontre nenhuma pessoa no trajeto de vôo.

## EXECUÇÃO

### Determinação do comprimento do lançamento em dependência do ângulo de lançamento:

- Ajustar o ângulo de lançamento  $\alpha = 30^\circ$ .
- Posicionar o alvo a uma distancia cerca de 1 m.
- Carregar o aparelho de lançamento, de acordo com a instrução de operação, até a menor tensão da mola.
- Lançar a esfera e perseguir a trajetória da esfera.
- Deslocar o alvo até o ponto de impacto da esfera.
- Repetir o lançamento e corrigir a posição do alvo tantas vezes, até que a esfera atinja o centro do alvo.
- Averiguar a distancia  $X$  do centro do alvo e anotar na Tab. 1.
- Efetuar uma medição atrás da outra também para os ângulos de lançamento  $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$  e  $75^\circ$ .
- Na Tab. 1 a partir das distancias  $X$  conforme (10) calcular os comprimentos de lançamento  $s$ .

### Determinação do comprimento máximo de lançamento em dependência da velocidade inicial do lançamento:

- Ajustar o ângulo de lançamento  $\alpha = 45^\circ$ .
- Carregar o aparelho de lançamento, de acordo com a instrução de operação, até a tensão média da mola.
- Lançar a esfera e perseguir a trajetória da esfera.
- Deslocar o alvo até o ponto de impacto da esfera.
- Repetir o lançamento e corrigir a posição do alvo tantas vezes, até que a esfera atinja o centro do alvo.
- Averiguar a distancia  $X$  do centro do alvo e anotar na Tab. 2.
- Executar também as medições para a tensão máxima da mola.
- Na Tab. 2 a partir das distancias  $X$  conforme (10) calcular os comprimentos máximos de lançamento  $s_{max}$ .

### Esboço pontilhado das “parábolas de lançamento” em dependência do ângulo de lançamento:

- Ajustar o ângulo de lançamento  $\alpha = 30^\circ$  e posicionar o alvo de tal maneira, que a esfera aterrisse com tensão de mola mínima no centro.
- Montar a bitola de altura na base em tonel e posicionar em  $X = 100$  mm.
- Arranjar o par de indicadores em  $Y_1 = 110$  mm e  $Y_2 = 140$  mm.
- Lançar a esfera com tensão mínima de lançamento e verificar se ela aterrisa desimpedida no centro do alvo.
- No caso, corrigir a posição dos indicadores tantas vezes, até que a esfera aterrisa no centro do alvo.
- Anotar os valores  $X$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$  na Tab. 3 de aí calcular  $x$ ,  $y$  e  $\Delta y$ .
- Aumentar a distancia  $X$  em passos de 50 mm e cada vez corrigir a posição dos indicadores até que a esfera aterrisa no centro do alvo com tensão mínima de mola.
- Executar também as medições para os ângulos de lançamento  $\alpha = 45^\circ, 60^\circ$  e  $75^\circ$  e anotar os resultados nas Tab. 4, 5 e 6.
- Caso exista disposição de suficiente espaço de experiência executar medições também para tensões de mola maiores.

## EXEMPLO DE MEDIÇÃO

### Determinação do comprimento do lançamento em dependência do ângulo de lançamento:

Tab. 1: Comprimento do lançamento em dependência do ângulo de lançamento com velocidade de lançamento mínima

$\alpha$	$X$ / mm	$s$ / mm
$30^\circ$	920	1030
$45^\circ$	1100	1210
$60^\circ$	910	1020
$75^\circ$	465	575

Tab. 2: Determinação do comprimento máximo de lançamento em dependência da velocidade inicial do lançamento

Tensão de mola	$X$ / mm	$s_{max}$ / mm	$v_0$ / m/s
1	1100	1210	3,45
2	2230	2340	4,79
3	4490	4600	6,72

**Esboço pontilhado das “parábolas de lançamento” em dependência do ângulo de lançamento:**

Tab. 3: Coordenadas da curva de voo ao ângulo de lançamento  $\alpha = 30^\circ$ :

X / mm	x / mm	Y <sub>1</sub> / mm	Y <sub>2</sub> / mm	y / mm	$\Delta y$ / mm
0	100	110	140	87,5	2,5
50	150	135	165	112,5	2,5
100	200	155	185	132,5	2,5
150	250	165	195	142,5	2,5
200	300	175	205	152,5	2,5
250	350	180	210	157,5	2,5
300	400	185	215	162,5	2,5
350	450	185	215	162,5	2,5
400	500	180	210	157,5	2,5
450	550	175	205	152,5	2,5
500	600	165	200	145,0	5
550	650	150	185	130,0	5
600	700	140	170	117,5	2,5
650	750	120	155	100,0	5

Tab. 4: Coordenadas da curva de voo ao ângulo de lançamento  $\alpha = 45^\circ$ :

X / mm	x / mm	Y <sub>1</sub> / mm	Y <sub>2</sub> / mm	y / mm	$\Delta y$ / mm
0	0	110	155	100	5
50	50	160	195	140	5
100	100	210	225	172,5	2,5
150	150	260	260	205	5
200	200	310	290	235	5
250	250	360	310	255	5
300	300	410	330	275	5
350	350	460	345	290	5
400	400	510	355	302,5	2,5
450	450	560	360	307,5	2,5
500	500	610	360	307,5	2,5
550	550	660	355	302,5	2,5
600	600	710	350	297,5	2,5
650	650	760	340	287,5	2,5
700	700	810	320	267,5	2,5
750	750	860	305	250	5
800	800	910	285	227,5	7,5
850	850	960	255	200	5
900	900	1010	225	167,5	7,5
950	950	1060	190	130	10
1000	1000	1110	150	92,5	7,5

Tab. 5: Coordenadas da curva de voo ao ângulo de lançamento  $\alpha = 60^\circ$ :

X / mm	x / mm	Y <sub>1</sub> / mm	Y <sub>2</sub> / mm	y / mm	$\Delta y$ / mm	
0	0	11	195	245	182,5	12,5
50	50	16	260	305	245	10
100	100	21	310	350	292,5	7,5
150	150	26	370	410	352,5	7,5
200	200	31	405	440	385	5
250	250	36	440	485	425	10
300	300	41	465	495	442,5	2,5
350	350	46	480	510	457,5	2,5
400	400	51	480	510	457,5	2,5
450	450	56	475	505	452,5	2,5
500	500	61	460	490	437,5	2,5
550	550	66	435	470	415	5
600	600	71	405	445	387,5	7,5
650	650	76	355	400	340	10
700	700	81	310	355	295	10
750	750	86	245	295	232,5	12,5
800	800	91	170	240	167,5	22,5

Tab. 6: Coordenadas da curva de voo ao ângulo de lançamento  $\alpha = 75^\circ$ :

X / mm	x / mm	Y <sub>1</sub> / mm	Y <sub>2</sub> / mm	y / mm	$\Delta y$ / mm	
0	0	110	310	430	332,5	47,5
50	50	160	450	510	442,5	17,5
100	100	210	525	570	510	10
150	150	260	575	605	552,5	2,5
200	200	310	575	610	555	5
250	250	360	540	585	525	10
300	300	410	470	525	460	15
350	350	460	360	440	362,5	27,5
400	400	510	225	320	235	35

## ANÁLISE

### Determinação do comprimento do lançamento em dependência do ângulo de lançamento:

Fig. 4 descreve graficamente a dependência do comprimento do lançamento  $s$  do ângulo de lançamento  $\alpha$  de acordo aos valores de medição da Tab. 1. E curva desenhada a través dos pontos de medição foi calculada  $v_0 = 3,42$  m/s segundo (9).

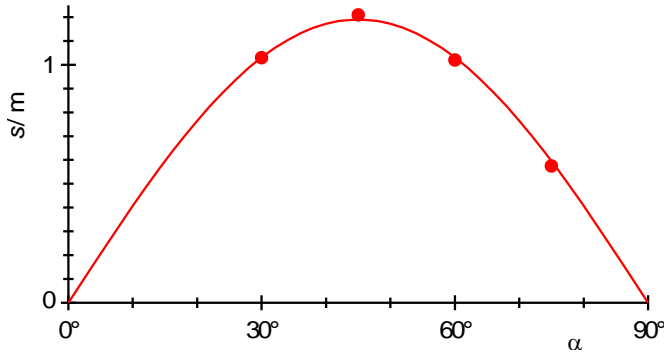


Fig. 4: Comprimento do lançamento em dependência do ângulo de lançamento

Com ângulo de lançamento  $\alpha = 45^\circ$  o comprimento máximo  $s_{max}$  de qualquer curvatura será calculado.

### Determinação do comprimento de lançamento máximo $s_{max}$ em dependência da velocidade de lançamento $v_0$ :

Do comprimento de lançamento máximo  $s_{max}$  obtido com  $45^\circ$  pode-se calcular a velocidade lançamento  $v_0$ . De acordo a equação 9 vale

$$v_0 = \sqrt{g \cdot s_{max}}$$

Os resultados são mostrados na Tab. 2.

### Esboço pontilhado das “parábolas de lançamento” em dependência do ângulo de lançamento:

Fig. 5 mostra em representação gráfica as curvaturas de vôo listadas nas Tab. 3 até 6. Uma análise exata mostra que a curvatura de vôo desvia minimamente da forma da parábola, devido a que há que tomar em conta a resistência do ar sobre a esfera.

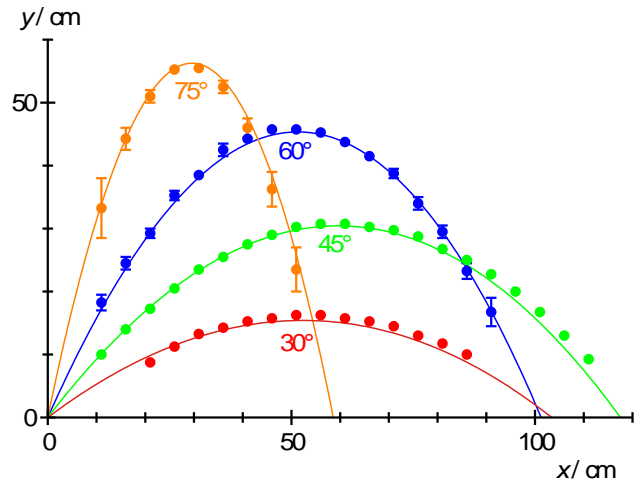


Fig. 5: Parábola medida e com a inclusão da resistência do ar pela velocidade mínima e em diferentes ângulos de lançamento.