

目标

测量两端被支撑的扁梁出现的变形，并确定弹性模量。

实验过程

- 测量在中心位置施加负荷所产生的变形曲线，以及在非中心位置施加负荷所产生的变形曲线。
- 测量变形与施加力的函数关系。
- 测量变形与长度、宽度和厚度的函数关系，确定测量与材料之间的相互关系，并确定材料的弹性模量。

概要

在其变形远远小于梁的长度的情况下，扁平梁对于受到外力之后而出现的弯曲变形的抗性，可通过数学计算获得。变形与扁平梁材料的弹性模量E成正比。在这一实验中，对由已知大小的力导致的变形加以测定，其结果用来确定钢材和铝材的弹性模量。

所需的装置

数量	描述	编号
1	测量杨氏模量的装置	1018527
1	杨氏模量补充套装	1018528
1	袖珍卷尺, 2 m	1002603
1	外千分尺	1002600

基本原则

在其变形远远小于梁的长度的情况下，扁平梁对于受到外力之后而出现的弯曲变形的抗性，可通过数学计算获得。变形与扁平梁的材料的弹性模量E成正比。因此，可测定由已知其大小的力导致的变形，且其结果可用来确定弹性模量。

在此计算之中，梁被分为平行的部分，由于外部的弯曲和伸展而使得内部发生了压缩。中性段未受到任何压缩或者拉伸。

其他线条的相对扩展或者压缩 ε ，以及与它们到中性段的距离z有关的相关张力 σ ：

$$(1) \quad \varepsilon(z) = \frac{s + \Delta s(z)}{s} = \frac{z}{\rho(x)} \quad \text{和} \quad \sigma(z) = E \cdot \varepsilon(z)$$

$\rho(x)$: 因弯曲导致的局部曲率半径

2

因此曲率与局部弯矩相关:

$$(2) \quad M(x) = \int_A \sigma(z) \cdot z \cdot dA = \frac{1}{\rho(x)} \cdot E \cdot I$$

其中 $I = \int_A z^2 \cdot dA$: 面积惯性矩

作为对曲率半径 $\rho(x)$ 的替代, 在这一实验中, 可测得变形曲线 $w(x)$, 其中中性段会从其平衡位置发生偏移。只要由变形导致的变化 $dw(x)/dx$ 足够小, 即可采用以下公式计算:

$$(3) \quad \frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot I},$$

通过二重积分的方式得到变形曲线。

典型的例子是, 观察一个长度为 L 的梁, 其两端被支撑, 并在点 a 位置施加一个向下的力 F 。在达到平衡的状态下, 所有作用力的合力为 0:

$$(4) \quad F_1 + F_2 - F = 0$$

同样地, 作用于梁之上的任意点 X 的力矩之和也是 0:

$$(5) \quad M(x) - F_1 \cdot x - F_2 \cdot (L - x) + F \cdot (a - x) = 0$$

在梁的两端不会出现弯曲或者变形, 也就是说 $M(0) = M(L) = 0$ 以及 $w(0) = w(L) = 0$ 。这也说明, $M(x)$ 完全可确定:

$$(6) \quad M(\zeta) = \begin{cases} F \cdot L \cdot (1-\alpha) \cdot \zeta; & 0 \leq \zeta \leq \alpha \\ F \cdot L \cdot \alpha \cdot (1-\zeta); & \alpha < \zeta \leq 1 \end{cases}$$

where $\zeta = \frac{x}{L}$ and $\alpha = \frac{a}{L}$

通过二重积分的方式得到变形曲线。

$$(7) \quad w(\zeta) = \begin{cases} \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I} \left[(1-\alpha) \cdot \frac{\zeta^3}{6} - \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{3} \right) \cdot \zeta \right] \\ \frac{F \cdot L^3}{E \cdot I} \left[\frac{\alpha^3}{6} - \left(\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha}{3} \right) \zeta + \frac{\alpha}{2} \cdot \zeta^2 - \frac{\alpha}{6} \cdot \zeta^3 \right] \end{cases}$$

在实验中, 对曲线的形状进行检查, 确认其荷载是在梁的中心位置 ($\alpha = 0.5$) 还是非中心位置 ($\alpha < 0.5$)。

评价:

当荷载处于中心位置时, 则: $w(x = \frac{L}{2}, a = \frac{L}{2}) = -\frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$

对于宽度为 b 高度为 d 的矩形, 可进行以下计算:

$$I = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 \cdot b \cdot dz = \frac{d^3}{12} \cdot b$$

则: $w(x = \frac{L}{2}, a = \frac{L}{2}) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{L^3}{d^3} \cdot \frac{1}{b}$

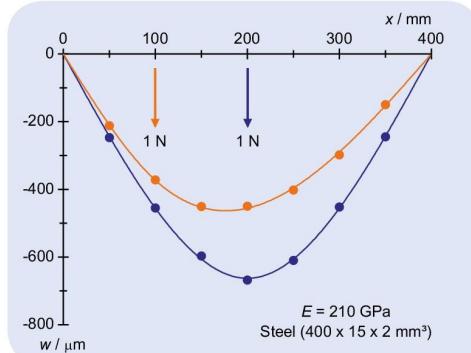


图 1: 对于施加于中心和非中心位置的荷载所测量和计算得到的变形曲线

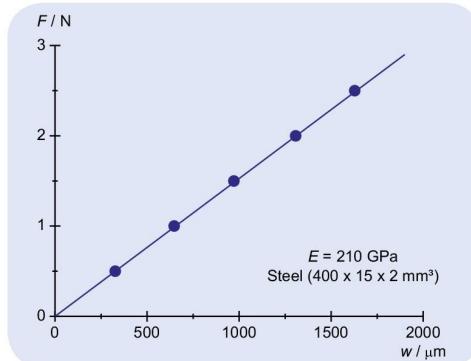


图 2: 胡克定律的验证

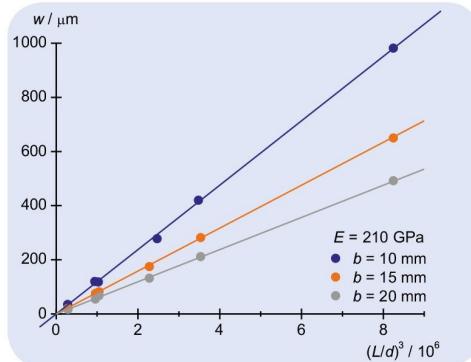


图 3: 变形与 $(L/d)^3$ 的相关性

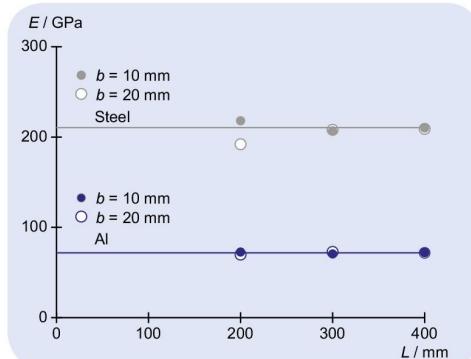


图 4: 钢材和铝材的弹性模量